大学院情報理工学研究科
博士前期課程一般入試　入学試験問題
（2023年8月17日実施）

【情報・ネットワーク工学専攻】

専門科目：［選択問題］

※注意事項

1．試験開始の合図があるまで問題冊子を開いてはいけない。

2．選択問題の問題冊子はこの注意事項を含めて１１枚、解答用紙は３枚である。

3．試験開始の合図の後、全ての解答用紙に受験番号を記入すること。

4．選択問題の試験時間は120分である。

5．選択問題では、８科目の中から３科目を選んで解答すること。

6．解答用紙の科目の番号欄には、選択した科目の番号を記入すること。
（採点は記入された番号についてのみ行う。誤記入、記入もれに注意すること）

7．解答は、科目ごとに別々の解答用紙（各科目ごとに１枚）を使用すること。
必要なら裏面を使用してもよいが、その場合は表面下に「裏面へ続く」と記入すること。

8．試験中に問題冊子の印刷不鮮明、ページの落丁・乱丁及び解答用紙の汚れ等に気付いた場合は、手を挙げて監督者に知らせること。

9．試験終了後、この問題冊子は持ち帰ること。

10．解答は英語でもよい。

問題は次のページからです。

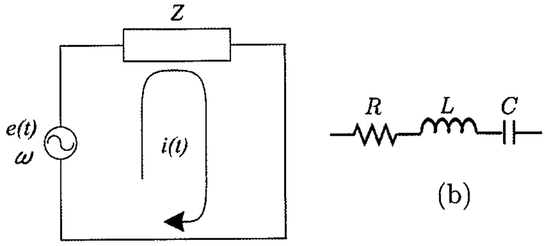
このページは問題冊子の枚数には
含みません。

大学院情報理工学研究科　博士前期課程：一般入試（2023 年 8 月 17 日実施）

選択問題
情報・ネットワーク工学専攻

科目の番号

1　電気回路



(a)　(b)　図 1

図 1(a) の回路は，正弦波の電圧$e(t)$ の交流電源とインピーダンスZ の回路素子を含む。角周波数をω とする。

(1) 電圧 $e(t)$ と電流$i(t)$ がそれぞれ $e(t) = e_0\sin(\omega t)$ [V], $i(t) = i_0\cos(\omega t - 30°)$ [A] である時, 以下の問に答えよ。

(a) 電圧 $e(t)$ の最大値V_m, 絶対平均値V_a, 実効値V_e, 電流の最大値 I_m, 平均値 I_a と実効値 I_e を求めよ。

(b) 電圧 $e(t)$ の $t = 0$ における位相θ_v, 電圧を基準にした時の電流 $i(t)$ の初期位相 θ_i 及び位相差を求めよ。

(c) 電圧 $e(t)$ のフェーザ表示 (極座標表示) と電流のフェーザ表示を求めよ。

(d) インピーダンス Z の複素電力$\dot{P}_c$, 皮相電力P_a, 有効電力P と無効電力P_r を求めよ。また, それぞれの電力の単位を記入せよ。

(2) 図 1(b) は, 図 1(a) の回路のインピーダンス Z の構成を示す。インピーダンス Z は, 抵抗R, インダクタンスL と キャパシタンスC の回路素子を含む。以下の問に答えよ。

(a) 回路の電流 $i(t)$ 用いる電圧 $e(t)$ に関する方程式を求め, 電流 $i(t)$ のフェーザ表示, インピーダンス Z のフェーザ表示及び共振条件を求めよ。

(b) 電圧 $e(t)$ のフェーザ表示が $10\angle 0°$ [V], $R = 5$ [Ω], $L = 40$ [mH], $C = 4$ [μF] とした時, 共振時の角周波数 ω_0, インピーダンス Z_0 のフェーザ表示, 電流 i_0 のフェーザ表示, キャパシタンス C の電圧 V_{C_0} のフェーザ表示を求めよ。

図 2 は、電源 $e_s(t)$、抵抗 R とキャパシタンス C からなる回路である。以下の問いに答えよ。

(3) $R = 1$ [Ω], $C = 0.5$ [F] である時, 以下の問に答えよ。

(a) 回路の電流 $i(t)$ 用いる電圧 $e_s(t)$ に関する方程式とそのラプラス変換を求め，入力電圧 $e_s(t) = \delta(t)$ [V] である時，電流 $i(t)$ を出力とした時の回路のインパルス応答$h(t)$ を求めなさい。

(b) 入力電圧 $e_s(t) = 5e^{-t}\sin 2t \cdot u(t)$ [V] である時、回路方程式のラプラス変換を求めて，電流 $i(t)$ の過渡応答を求めなさい。

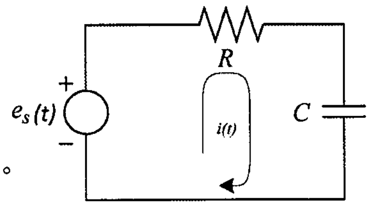


図 2

回路: circuit, 正弦波: sinusoidal wave, 電圧: voltage, 交流電源: AC source, インピーダンス: impedance, 素子: element, 角周波数: angular frequency, 電流: current, 最大値: maximum value, 絶対平均値: absolute average value, 実効値: effective value, 位相: phase, 基準: base on, 初期: initial, 差: difference, フェーザ: phasor, 極座標: polar coordinates, 複素電力: complex power, 皮相電力: apparent power, 有効電力: effective power, 無効電力: reactive power, 単位: unit, 抵抗: resistor, インダクタンス: inductance, キャパシタンス: capacitance, 方程式: equation, 共振条件: resonance condition, ラプラス変換: Laplace transform, 入力: input, 出力: output, インパルス応答: impulse response, 過渡応答: transient response.

大学院情報理工学研究科　博士前期課程：一般入試（2023 年 8 月 17 日実施）

選択問題

情報・ネットワーク工学専攻

科目の番号

2　電磁気学

真空中の誘電率を ϵ_0 [F/m]，透磁率を μ_0 [H/m]，円周率を π としたとき，以下の問いに答えよ．

1. 半径がそれぞれ，$a_1 = 4$ [cm]，$a_2 = 2$ [cm] の 2 個の導体球を十分離しておき，それぞれを $V_1 = 10$ [V]，$V_2 = 5$ [V] に帯電した後，両者を細い導線で接続した．接続後の導体球表面の電位 [V] を求めよ．

2. 図 2-1 に示すように，真空中に半径 a [m] の導体球を内半径 b [m]，外半径 c [m] の導体同心球殻で包み，内球導体に $+Q$ [C]，外球球体に $-Q$ [C] の電荷を与えた．このとき，以下の問いに答えよ．
(1) 全空間の電界の大きさ [V/m] を求めよ．
(2) 内球表面と外球内面間の電位差 [V] を求めよ．
(3) この球形コンデンサの静電容量 [C] を求めよ．

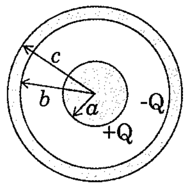


図 2-1

3. 真空中に，距離 a [m] だけ離れ 2 点に点電荷 $2Q$ [C]，$3Q$ [C] が置かれている．2 つの電荷を結ぶ直線上のある点に電荷 Q_0 [C] を置いたとき，Q_0 [C] に働く力がゼロになった．電荷 $2Q$ からの距離を x [m] としたとき，点電荷の位置を求めよ．但し，Q [C] と Q_0 [C] は正電荷（> 0）とする．

4. 真空中に，左側から順番に無限に長い 3 本の直線導線A, B, C が平面内に平行に置かれている．AB 間の距離を 0.2 [m]，BC 間の距離を 0.3 [m] としたとき，以下の問いに答えよ．
(1) 平面の上から見た状態で，導線A に上向きに 2 [A] の電流，導線 B に下向きに 3 [A] の電流を流した．導線 C には電流を流さないとき，導線 B に働く単位長さあたりの力の大きさ [N] と向きを求めよ．
(2) 続いて，導線 A, B には (1) と同じ電流を流し，導線 C にある大きさの電流を流したところ，導線 B に働く力がゼロになった．導線 C に流した電流の大きさ [A] と向きを求めよ．但し，μ_0 の値は $4\pi \times 10^{-7}$ [H/m] とする．

5. 間隔 d [m]，面積 S [m^2] の平行板コンデンサの中へ，厚さ t ($d > t$) [m] で，電極板と同じ面積で,（十分に大きい）正方形の導体板を平行に挿入した．このとき，次の問いに答えよ．但し，平行板の端効果は無視するものとする．
(1) 平行板コンデンサの静電容量 C_1 [F] を求めよ．ただし，コンデンサ間は真空とする．
(2) 同様の平行板コンデンサに，導体板と同じ寸法で比誘電率 ϵ_s の誘電体板を挿入したときの静電容量 C_2 [F] を求めよ．
(3) 縦軸を C_1/C_2，横軸を ϵ_s にとり，ϵ_s が十分に大きくなるまで変化させた際のグラフを描け．

真空中（vacuum），誘電率（permittivity），透磁率（magnetic permeability），円周率（circumference ratio），導体球（conducting sphere），帯電（electrification），導線（guide），表面（surface），電位（electric potential），内半径（inner radius），外半径（outer radius），導体同心球殻（conducting concentric sphere shell），内球導体（inner conducting sphere），外球球体（outer sphere），電荷（charge），全空間（whole space），導体球間（between conducting sphere），電界（electric field），内面（inside），電位差（electric potential difference），静電容量（electrostatic capacitance），距離（distance），点電荷（point charge），力（force），正電荷（positive charge），直線導線（linear guide），平面内（in-plate），平行（parallel），導線（guide wire），電流（current），単位長さ（unit length），間隔（interval），面積（area），平行板コンデンサ（parallel plate conductor），厚さ（thickness），電極板（electrode plate），正方形（square），導体板（conductor plate），端効果（edge effect），比誘電率（relative dielectric constant），誘電体板（dielectric plate），縦軸（vertical axis），横軸（horizontal axis）

大学院情報理工学研究科　博士前期課程：一般入試（2023 年 8 月 17 日実施）

選択問題

情報・ネットワーク工学専攻

科目の番号

3　確率統計

ある無線信号のパワー X は次の確率密度関数に従う確率変数であるとする．

$$f(x) = \frac{d}{dx}P(X \le x) = \frac{1}{\beta}e^{-\frac{x}{\beta}} \ (x \ge 0) \qquad (\#1)$$

ただし，$\beta\ (\beta > 0)$はパラメタで，e は自然対数の底である．このとき，以下の問いに答えよ．

（1）確率変数 X の積率母関数 $\varphi(\theta) = \mathrm{E}\left[e^{\theta X}\right]\ (\theta < \frac{1}{\beta})$ を求めよ．

（2）無線信号のパワー X が $\beta_0\ (\beta_0 > 0)$ 以上である確率 $P(X > \beta_0)$ を求めよ．

（3）確率変数 Z を(#2)で定義する．このとき，Z の期待値 $\mathrm{E}[Z]$ を求めよ．

$$Z = \begin{cases} X & (X \ge \beta_0) \\ 0 & (0 \le X < \beta_0) \end{cases} \qquad (\#2)$$

（4）無線信号の平均振幅 Y を $Y = \sqrt{X}$ と定義する．このとき，X の確率密度関数を用いて，Y の期待値 $\mathrm{E}[Y]$ と分散 $\mathrm{V}[Y]$ を求めよ．
$\int_0^\infty t^2 e^{-at^2} dt = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{\pi}{a^3}}\ (a > 0)$を利用してもよい．

以下では，n 個の無線信号のパワー $X_1, X_2, \cdots, X_n$ について考える．これらは独立に同一の分布(#1)に従うとするとき，以下の問いに答えよ．

（5）パラメタ β は未知であるとする．$X_1, X_2, \cdots, X_n$ の標本値を $x_1, x_2, \cdots, x_n$ とするとき，β の最尤推定値 $\hat{\beta}$ を求めよ．

（6）n 個の無線信号のパワーの最大値を $W = \max\{X_i, i = 1,2,\cdots,n\}$ とするとき，W が $\beta_0\ (\beta_0 > 0)$ 以上である条件付き確率密度関数
$g(w|W > \beta_0) = \frac{d}{dw}P(W \le w|W > \beta_0)$ を求めよ．

無線信号：wireless signal，パワー：power，確率密度関数：probability density function，確率変数：random variable，パラメタ：parameter，自然対数の底：base of the natural logarithm，積率母関数：moment generating function，期待値：expectation，平均振幅：average amplitude，分散：variance，独立に同一の分布：independent and identically distributed，未知：unknown，標本値：sample value，最尤推定値：maximum likelihood estimate，最大値：maximum，条件付き確率：conditional probability

大学院情報理工学研究科　博士前期課程：一般入試（2023 年 8 月 17 日実施）

選択問題

情報・ネットワーク工学専攻

科目の番号

4　信号処理

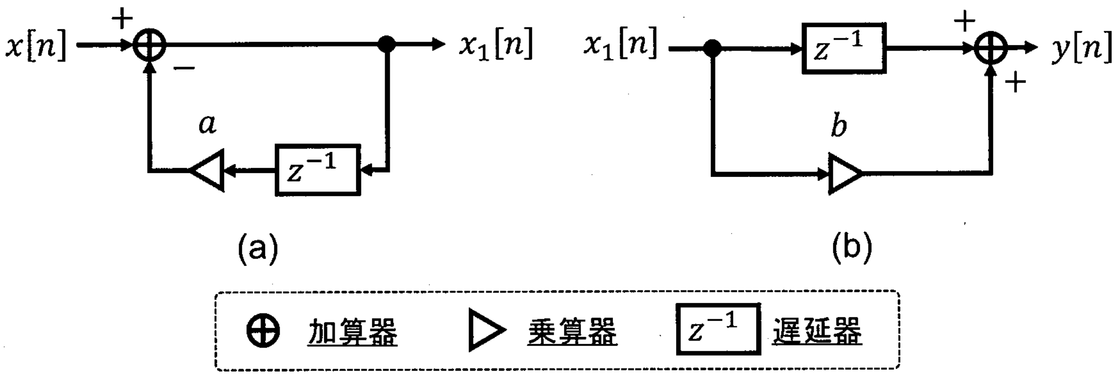
問１　信号の標本化に関して以下の問いに答えよ．

（１）50kHz の正弦波信号を標本化定理により変換するとき，変換した信号をひずみなくアナログ信号に戻すことのできる標本化周波数の下限を答えよ．

（２）50kHz の正弦波信号を 80kHz の標本化周波数で標本化した後，遮断周波数 40kHz の理想的な低域通過フィルタを通してアナログ信号に戻した場合，出力される信号の周波数は何 Hz の正弦波信号になるかを答えよ．

（３）（２）で発生する現象を何と呼ぶかを答えよ．

問２　下図に示すディジタルシステムについて以下の問いに答えよ．ただし，図 (a) のシステムの入力を$x[n]$，出力を$x_1[n]$，図 (b) のシステムの入力を$x_1[n]$，出力を$y[n]$とする．



（１）図 (a) のシステムの差分方程式を示し，伝達関数$H_1(z)$を求めよ．

（２）図 (b) のシステムの差分方程式を示し，伝達関数$H_2(z)$を求めよ．

（３）図 (a) の出力を図 (b) の入力とする 2 つのシステムを縦続構成したシステムの伝達関数$H(z)$を求めよ．

（４）（１）で求めた$H_1(z)$の周波数応答$H_1(e^{j\Omega})$の振幅特性と位相特性を求めよ．

（５）（３）で求めた$H(z)$の周波数応答$H(e^{j\Omega})$の振幅特性が，周波数に依存せず常に$|H(e^{j\Omega})| = 1$を満足するaとbの関係を求めよ．ただし，$a > 0, b > 0$とする．

標本化：sampling, 正弦波信号：sine wave signal, 標本化定理：sampling theorem, ひずみ: distortion, アナログ信号：analog signal, 周波数：frequency, 遮断：cutoff, 低域通過フィルタ：low pass filter, 現象：phenomenon, 加算器：adder, 乗算器：multiplier, 遅延器：unit delay, 差分方程式：difference equation, 伝達関数：transfer function, 縦続：cascaded, 周波数応答：frequency response, 振幅特性：amplitude response, 位相特性：phase response

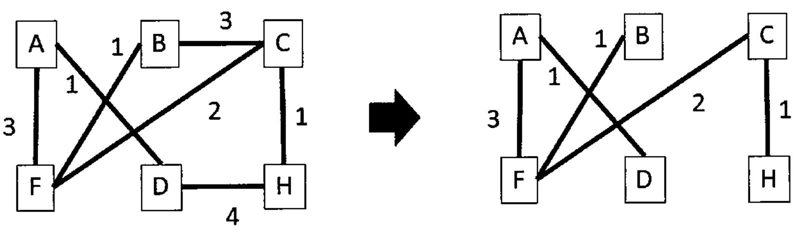
選択問題

情報・ネットワーク工学専攻

科目の番号

5　アルゴリズムとデータ構造

頂点集合 V, 辺の集合 E からなる連結した無向グラフ G=(V,E)で, G の各辺が正の数値を辺のコスト（重さ）として持つ場合（つまり，G は重さつき無向グラフ）を考える．このとき，G の全頂点を連結し E の部分集合を辺集合として持つ木(＝閉路のない連結グラフ)を G の全域木と呼び, 全域木のコストは，その木がもつ辺のコストの総和である．このとき，G からコスト最小となる全域木 T を 1 つ求めたい．例えば図 1 (a)の G0 は頂点 6 つ（A, B, C, D, F, H）を持ち，図中の各辺につけた数値はその辺のコストを表す. (例えば, 辺(A,F)のコストは 3.)　このとき, 図 1(b)は, 辺集合{(A,F),(A,D), (C,F), (C,H), (B,F)}からなる木 T0 であり，そのコストは 8 で，G0 の全域木としてコスト最小である．



(a) G0　　(b) コスト最小となる全域木T0

図1. 重さつき無向グラフG0と, G0のコスト最小となる全域木T0

一般に G からコスト最小の全域木 T を求める解法として，G の 1 つの頂点（s とする）から始めて T を構成する部分木を成長させていく方法がある．このアルゴリズム M1 を，C 言語に似せた擬似コードで以下に示す.（各行は 1 つの処理を表し，左端の数字 1~7 は行番号，記号//から後はコメント文.）：

【アルゴリズム M1】
入力: 各辺に正のコストを持つ無向グラフ G = (V,E)，出発点 s∈V
出力: コスト最小の全域木 T の辺の集合 Eopt　（初期値は空集合）

```
1   U  ←  {s} ;              //  U の初期値は{ s }.
2   while ( U ≠ V )  {       //  U と V が一致しない限り 6 行目までの while ループを実行する
3       U の頂点と V−U の頂点を結ぶ辺のうちコスト最小の辺を e とする;  //  V − U は集合の差演算
4       Eopt に e を追加;
5       辺 e の両端点のうち V−U の要素となる側の頂点を U に追加する;
6   }
7   Eopt を出力;
```

今，G の頂点数を n，辺の数を m として，この擬似コードの 3 行目の処理（「U の頂点と V−U の頂点を...」の処理）を効率化することでアルゴリズム M1 を効率良く実行する問題を考えよう．以下の小問全てに答えよ.

(1)　図 1(a)のグラフ G0 に頂点 B を出発点 s としてアルゴリズム M1 を適用して T を求めるとき，辺集合 Eopt に追加される辺とその順番を答えよ.

【次ページに続く】

【前ページから続く】

(2) G の各頂点の持つ無向辺を隣接リストで表現し, M1 の 3 行目の処理(以下, step.3 と表記する)を, U に属す全頂点の隣接リストを全て探索して検査するようにすれば, e を決定できる. この作り方の時, アルゴリズム M1 の最悪時の時間計算量を n, m を使ったオーダー記法O( )で答え, その理由を述べよ.

(3) 次に, step.3 の「U の頂点と V−U の頂点を結ぶ辺」の集合を X として, X をあるデータ構造で表現し, それを使って step.3 を(2)の場合よりも効率良く実行することを考えよう. ただし, X の更新は M1 の 5 行目の処理(以下, step.5 と表記)の一部として行うことにする. X を表す適切なデータ構造を 1 つあげ, そのデータ構造を使った step.3 と step.5 の実行方法を, その効率も含めて答えよ. (解答は, 選んだデータ構造への要素の挿入・取り出し・更新などの操作をどの辺について行って各 step を実行するかを, 自然言語や擬似コードで述べれば良い. データ構造内部の変更手続きの詳細な記述は不要. step.5 では X の更新に伴う操作も解答に含めること.)

(4) (3) で解答した作り方に従うとき, アルゴリズム M1 の時間計算量を, n, m を使ったオーダー記法 O( )で答え, その理由を述べよ.

(5) G からコスト最小の全域木 T を求めた後, T の任意に指定された 1 つの辺のコストがもっと大きな値に更新された場合を考えよう. 例えば, 図 1(b)で T0 を求めた後, 辺(C,F)のコストが 2 から 10 に変更された場合である. このとき, G に M1 を適用し直すよりも効率よくコスト最小の全域木 T を再計算したい. ただし, 1 回目の計算経過の情報は全て消去されており, 再計算で利用できる情報は G と 1 回目の答え T のみとする. T を再計算するアルゴリズムの概要を述べよ. (解答は, アルゴリズムを構成する主要な手順を自然言語や擬似コードなどで述べるだけで良い. その方法が正しくコスト最小の全域木を再計算できる理由, 直接 M1 を適用し直す場合よりも効率良くなる理由, も答えること.)

頂点(vertex), 連結した無向グラフ(connected undirected graph), コスト（重さ）(cost, weight), 重さつき無向グラフ(weighted undirected graph), 連結グラフ(connected graph), 全域木(spanning tree), コスト最小となる全域木(minimum-cost spanning tree), 部分木(subtree), 擬似コード(pseudo code), 集合の差演算(set-difference), 端点(end vertex), 隣接リスト(adjacency list), 時間計算量(time-complexity), 自然言語(natural language), 再計算(recompute)

大学院情報理工学研究科　博士前期課程：一般入試（2023 年 8 月 17 日実施）

選択問題

情報・ネットワーク工学専攻

科目の番号

6　計算機の基本原理

1. 次の仕様を満たす論理回路を考える．

- 入力は 5 ビットの2の補数表現による符号付き 2 進数 $b_4b_3b_2b_1b_0$とする．
- 出力は 4 ビットの符号なし 2 進数 $d_3d_2d_1d_0$とする．
- 入力が偶数ならば 0 を出力し，奇数ならばその絶対値を出力する．

以下の設問に答えよ．ただし，入力は b_4を，出力は d_3を，それぞれ最上位ビットとする．

(1) 入力が正の奇数のとき，d_3, d_2, d_1をそれぞれ b_3, b_2, b_1を用いて表せ．

(2) 入力が負の奇数のとき，b_4およびb_0の値を示せ．

(3) 出力の各ビット d_3, d_2, d_1, d_0は，b_0を含まない論理関数 F_3, F_2, F_1, F_0により，$d_n = b_0 \cdot F_n$ $(n = 0, 1, 2, 3)$と表すことができる．$b_0 = 1$のとき，$F_n = d_n$となることを用い，F_3, F_2, F_1, F_0をできるだけ簡単な論理式で表せ．

(4) この回路を排他的論理和と論理積のみで構成した回路図を示せ．

2. 3 ビットの状態変数 Q_1, Q_2, Q_3を持つ同期式順序回路がある．この回路にはクロック信号 CLK 以外の入力は存在せず，各状態変数 Q_1, Q_2, Q_3がそのまま出力となっている．この回路の出力は，$Q_1 = Q_2 = Q_3 = 1$から始まるとき，7 クロック周期で次に示す遷移を繰り返す．

Q_1 : 1001011

Q_2 : 1100101

Q_3 : 1110010

また，$Q_1 = Q_2 = Q_3 = 0$のときは，この状態を維持する．以下の設問に答えよ．

(1) この回路の状態遷移図を示せ．ただし，状態は$Q_1Q_2Q_3$で表す（例：$Q_1 = 0, Q_2 = 0, Q_3 = 1$のとき，状態は 001）こと．また，状態遷移図への入出力の記入は不要である．

(2) 各状態変数 Q_1, Q_2, Q_3が次のクロックで遷移する値をそれぞれ Q_{1+}, Q_{2+}, Q_{3+}とするとき，Q_{1+}, Q_{2+}, Q_{3+}をできるだけ簡単な論理式で表せ．

(3) この回路を D フリップフロップと排他的論理和のみで構成した回路図を示せ．

2 の補数：two's complement，符号なし 2 進数：unsigned binary number，絶対値：absolute value，最上位ビット：most significant bit，論理関数：logical function，排他的論理和：exclusive OR，論理積：AND，状態変数：state variable，同期式順序回路：synchronous sequential circuit，状態遷移図：state transition diagram，D フリップフロップ：D-type flip-flop

選択問題

情報・ネットワーク工学専攻

科目の番号

7 数値計算

n 元連立一次方程式

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

を $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ と書き、さらに同値な方程式 $\mathbf{x} = M\mathbf{x} + N\mathbf{b}$ に変形して反復法でその解を求めることを考える。いずれも要素は実数であり、かつ $a_{ii} \neq 0$ $(1 \leq i \leq n)$ とする。

行列 A を $A = D + L + U$ と分割して記述する。ここで行列 D, L, U はそれぞれ

$$D = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix},\ L = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 \\ a_{21} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{n,n-1} & 0 \end{pmatrix},\ U = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & a_{n-1,n} \\ 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

である。

1. ヤコビ法は初期値 $\mathbf{x}^{(0)}$ に対して、$k = 0, 1, 2, \cdots$ として次の式で反復を行う：

$$x_1^{(k+1)} = \frac{1}{a_{11}} \left\{ b_1 - \left(a_{12}x_2^{(k)} + a_{13}x_3^{(k)} + \cdots + a_{1n}x_n^{(k)} \right) \right\}$$

$$\vdots$$

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left\{ b_i - \left(a_{i1}x_1^{(k)} + \cdots + a_{i,i-1}x_{i-1}^{(k)} + a_{i,i+1}x_{i+1}^{(k)} + \cdots + a_{in}x_n^{(k)} \right) \right\}$$

$$\vdots$$

$$x_n^{(k+1)} = \frac{1}{a_{nn}} \left\{ b_n - \left(a_{n1}x_1^{(k)} + a_{n2}x_2^{(k)} + \cdots + a_{n,n-1}x_{n-1}^{(k)} \right) \right\}$$

(a) 反復式を $\mathbf{x}^{(k+1)} = M\mathbf{x}^{(k)} + N\mathbf{b}$ と書くとき、M, N を D, L, U を用いて記述せよ。

(b) $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ とする。行列 M, N を求めよ。

(c) $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$、$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 15 \\ 9 \end{pmatrix}$ とする。初期値 $\mathbf{x}^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ としてヤコビ法で解いた場合の、$\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)}, \mathbf{x}^{(3)}$ を求めよ。

【次ページに続く】

【前ページから続く】

2. 任意のベクトル $\mathbf{x}$ と行列 A に対して次のノルムを定義する：

$$||\mathbf{x}|| \stackrel{\mathrm{def}}{=} \max_{1\le i\le n} |x_i|, \qquad ||A|| \stackrel{\mathrm{def}}{=} \max_{1\le i\le n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|.$$

(d)　$||A\mathbf{x}|| \le ||A|| \cdot ||\mathbf{x}||$ を証明せよ。

3. 行列 A が対角優位であるとは、次の性質を満たすことをいう：

$$|a_{ii}| > \sum_{j=1, j\ne i}^{n} |a_{ij}| \qquad (1 \le i \le n)$$

(e)　行列 A が対角優位の場合、$||M|| < 1$ を示せ。

4. 次の定理が成立する：

$\mathbb{R}^n$ 上で定義される関数 $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ が

(i) $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \Longrightarrow \mathbf{g}(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^n$,
(ii) $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \Longrightarrow ||\mathbf{g}(\mathbf{x}) - \mathbf{g}(\mathbf{y})|| \le \rho ||\mathbf{x} - \mathbf{y}||$,
(iii) $0 \le \rho < 1$

を満たす時、$\mathbf{x} = \mathbf{g}(\mathbf{x})$ の解 $\mathbf{x} = \mathbf{x}_*$ はただ 1 つ存在し、かつ $\mathbf{x}^{(0)}$ を初期値とする反復式 $\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{g}(\mathbf{x}^k)$ によって生成される列 $\left\{\mathbf{x}^{(k)}\right\}$ は $k \to \infty$ で $\mathbf{x}_*$ に収束する。

(f)　この定理を用いて、行列 A が対角優位の場合、ヤコビ法は必ず解に収束することを証明せよ。

反復法: Iterative methods; ヤコビ法: Jacobi method; ノルム: Norm; 対角優位: Diagonally dominant

大学院情報理工学研究科　博士前期課程：一般入試（2023 年 8 月 17 日実施）

選択問題

情報・ネットワーク工学専攻

科目の番号

8　離散数学とオートマトン

1. 集合$A = \{1,2,3,4\}$と実数$x \in \mathbb{R}$に対して，次の集合を定義する．

$$B(x) = \left\{(a,b,c) \in A^3 \middle| ax + b = c\right\}.$$

(1) $B(1)$ の要素をすべて書き出せ．

(2) $B(x)$ が空集合とならない実数 x の最大値と最小値を求めよ．

(3) $\{B(x) \mid x \in \mathbb{R},\ B(x) \neq \emptyset\}$ が A^3 の分割であることを示せ．

集合 S の分割 P とは，次を満たす集合である．

- 任意の $X \in P$ に対して，$X \subseteq S$ かつ $X \neq \emptyset$.
- 任意の $X, Y \in P$ に対して，$X \neq Y$ ならば $X \cap Y = \emptyset$.
- 任意の $y \in S$ に対して，ある $X \in P$ が存在し，$y \in X$.

2. 集合 X を要素数 m $(m \geq 3)$ の有限集合とする．次の問いに答えよ．

(1) X から X への写像を集めた集合 $\{f | f : X \to X\}$ の要素数を答えよ．

(2) (1) のうち，像$f(X)$ の要素数が 3 以下であるものの個数を m を用いて表せ．

(3) $m = 5$ として，(1) のうち，全射であるものの個数を答えよ．

集合 (set), 実数 (real number), 要素 (element), 空集合 (empty set), 最大値 (maximum number), 最小値 (minimum number), 分割 (partition), 要素数 (cardinality), 有限集合 (finite set), 写像 (mapping), 像 (image), 全射 (surjection)