大学院情報理工学研究科
博士前期課程一般入試　入学試験問題
（2019年8月16日実施）

【情報学専攻】

専門科目：［選択問題］

※注意事項

1．試験開始の合図があるまで問題冊子を開いてはいけない。

2．選択問題の問題冊子はこの注意事項を含めて１０枚、解答用紙は９枚である。（マークシート１枚を含む）

3．試験開始の合図の後、全ての解答用紙に受験番号を記入すること。
マークシートに受験番号をマークする際には左詰めで記入し、氏名は記入しないこと。

4．試験時間は必須問題と選択問題をあわせて180分である。

5．選択問題では、４科目の中から３科目を選んで解答すること。
また、選択した３科目は、選択科目記入シートに必ず○印を記入すること。
（採点は選択科目記入シートに○印が記入された科目についてのみ行う。誤記入、記入もれに十分注意すること。）
「確率・オペレーションズリサーチ」では、問２か問３を、
「計算機工学」は4-1［形式言語理論］か、4-2［計算機アーキテクチャ］を選択すること。

6．解答は、必ず当該科目の解答用紙を使用すること。
（解答用紙には問題番号が記入されているので、解答する科目番号が記入されている解答用紙を使用すること。「離散数学」問１・問２はマークシートを使用すること。）
また、解答用紙は裏面を使用してもよいが、その場合は表面下に「裏面へ続く」と記入すること。

7．選択科目記入シートは、試験終了後に必ず提出すること。

8．試験中に問題冊子の印刷不鮮明、ページの落丁・乱丁及び解答用紙の汚れ等に気付いた場合は、手を挙げて監督者に知らせること。

9．試験終了後、この問題冊子は持ち帰ること。

10．解答は英語でもよい。

大学院情報理工学研究科　博士前期課程：一般入試（2019 年 8 月 16 日実施）

選択問題

情報学専攻

科目の番号

1　アルゴリズムとデータ構造

以下の 配列 操作に関する問いに答えなさい．下記コード Qsort() は クイックソートの C 言語を用いた一実装例である．関数 Qsort(int a[], int lo, int hi) は，与えられた配列 a[lo]～a[hi] (ただし lo < hi) を再帰呼び出し によって整列する関数である．Qsort() 内部で用いられる関数 Partition(int a[], int lo, int hi) は，配列 a[] を 分割 する関数である．
また関数　void swap(int *x, int *y) は，x，y の，それぞれの参照先の値を入れ替える関数とする．

```
void Qsort(int a[], int lo, int hi)
{
  if(lo < hi){
    int mid = Partition(a, lo, hi);
    Qsort(a, lo, mid-1);
    Qsort(a, mid+1, hi);
  }
}
```

```
void Qfunc(int a[], int lo, int hi, int k)
{
  if(lo < hi){
    int mid = Partition(a, lo, hi);
    if(k < mid) Qfunc(a, lo, mid-1, k);
    if(k > mid) Qfunc(a, mid+1, hi, k);
  }
}
```

```
int Partition(int a[], int lo, int hi)
{
  int i, j;
  int piv = a[hi];

  if(lo == hi) return hi;
  i = lo;
  for(j = lo; j < hi; j++){
    if(a[j] <= piv){
      if(j != i) swap(&a[i], &a[j]);
      i++;
    }
  }
  if(i != hi) swap(&a[i], &a[hi]);

  return i;
}
```

1. (a) 配列 A[] = {4, 6, 7, 2, 1, 8, 9, 3, 5} に対して，mid = Partition(A, 0, 8) として呼び出した後の配列 A の状態と mid の値を答えなさい．
   (b) 配列 B[] = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9} に対して，mid = Partition(B, 0, 8) として呼び出した後の配列 B の状態と mid の値を答えなさい．
2. 配列を A[] = {4, 6, 7, 2, 1, 8, 9, 3, 5} とした時の，Qsort(A, 0, 8) の再帰動作の様子を，分割位置がわかるように図などを用いて説明しなさい．
3. 配列を B[] = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9} とした時の，Qsort(B, 0, 8) において Partition() 関数の呼び出し回数が何回になるかを答えなさい．また，この場合の計算時間は，前問の Qsort(A, 0, 8) の計算時間と比較して，大きくなるか小さくなるかを，理由とともに説明しなさい．
4. 上記配列 A[] = {4, 6, 7, 2, 1, 8, 9, 3, 5} に対して関数 Qfunc(A, 0, 8, k) を実行することを考える．k の値を k = 0, 4, 8 として実行した場合の，それぞれの配列 A の状態と，A[k] の値を答えなさい．
5. 長さ N の配列 C に対して，関数 Qfunc() を用いて，配列の 中央値 を求めるにはどの様にすれば良いかを答えなさい．ただし中央値は，配列 C に対して Qsort(C, 0, N-1) を用いた後に，C[N/2] が取る値とする．また Qfunc() を用いて中央値を求める方法は，Qsort() を用いて求める方法と比べて計算時間が長いか短いかを理由とともに説明しなさい．

キーワード: 配列: Array，クイックソート: Quick Sort，再帰呼び出し: Recursive call，分割: Partition，中央値: Median

大学院情報理工学研究科　博士前期課程：一般入試（2019 年 8 月 16 日実施）

選択問題

情報学専攻

科目の番号

2　確率・オペレーションズリサーチ

この科目（確率・オペレーションズリサーチ）を受験する場合には、問１は必ず解答し、問２と問３はいずれか一方のみを選択して解答すること。

問１　３つの確率変数X, Y, Zの同時観測の問題を考える。それぞれの確率変数の値の組み合わせの同時確率と、それぞれの組み合わせを得た時の報酬が表のように与えられている。

表　各確率変数の値の組み合わせの同時確率と報酬

X	0	0	0	0	1	1	1	1
Y	0	0	1	1	0	0	1	1
Z	0	1	0	1	0	1	0	1
確率	0.04	0.04	0.16	0.16	0.06	0.09	0.18	0.27
報酬	0	0	100	100	100	100	200	500

これらの確率変数について、以下の問いに答えよ。

問1-1　３つの確率変数を同時に観測する試行の報酬の期待値を求めよ。

問1-2　２つの確率変数YとZのみを観測する場合を考える。２つの確率変数YとZが互いに独立か、あるいは従属かを調べよ。

問1-3　$X=1$を指定して、条件付ける場合を考える。２つの確率変数YとZが互いに独立か、あるいは従属かを調べよ。

確率変数:random variable, 同時観測:simultaneous observation, 値:value, 組み合わせ:combination,
同時確率:joint probability, 報酬:reward, 表:table, 試行:trial, 期待値:expected value,
独立:independence, 従属:dependence, 条件:condition

問２　この問題を選択する場合には、以下のＡ、Ｂの双方に解答すること。そして問３に解答してはいけない。

A）　２つの確率変数X, Yを考える。それぞれの平均と分散を

$$E[X]=\mu_X, Var[X]=E[(X-\mu_X)^2]=\sigma_X^2$$
$$E[Y]=\mu_Y, Var[Y]=E[(Y-\mu_Y)^2]=\sigma_Y^2$$

と記す。またXとYの共分散を

$$Cov(X,Y)=\rho\sigma_X\sigma_Y$$

と置く。ただし$\sigma_X>0$および$\sigma_Y>0$とする。これらの仮定の下で、$0\le c\le 1$を満たすcを用いて、新たな確率変数$Z=cX+(1-c)Y$を考える。Zに関する以下の問いに答えよ。

問2A-1　$\mu_X>\mu_Y$として、Zの期待値$E[Z]$を最大にするcを求めよ。

問2A-2　$\rho=0$の場合のZの分散$Var[Z]$を導き、$Var[Z]$を最小にするcを求めよ。

問2A-3　$\sigma_Y^2<\sigma_X^2$とする。$\rho>0$のときの$Var[Z]$を導き、$Var[Z]$を最小にするcが0となるための条件を導け。

（次ページへ続く）

（前ページから続く）

B）　標本空間が 0 以上 1 以下の一様分布を考える。

問2B-1　この分布に従う確率変数Uのモーメント母関数$M_U(t)$を求めよ。

問2B-2　n個の互いに独立にUと同じ確率分布に従う確率変数を$U_1, \ldots, U_n$と置く。これらの和$V = U_1 + \cdots + U_n$のモーメント母関数$M_V(t)$を求めよ。

問2B-3　ある確率変数Xのモーメント母関数を$M_X(t)$と置く。これを定数倍した確率変数$Y = aX$のモーメント母関数$M_Y(t)$を、$M_X(t)$を用いて表せ。

問2B-4　$W = (U_1 + \cdots + U_n)/n$のモーメント母関数$M_W(t)$を求めよ。

仮定:assumption, 最大にする:maximize, 最小にする:minimize, 標本空間:sample space,
一様分布:uniform distribution, モーメント母関数:moment generating function

問３　この問題を選択する場合には、問２に解答してはいけない。

2 種類の手工芸品を生産している職場がある。その職場では、2 人の作業者が働いている。ある日に生産しなければならない手工芸品の生産量が与えられている。このとき、作業者が所定内労働時間を越えて仕事に従事しなければならない残業の費用を最小にするように、各作業者に割り当てる手工芸品の生産量を、線形計画法により決定したい。

2 種類の手工芸品を$\mathrm{P_1}$、$\mathrm{P_2}$で表し、作業者を$\mathrm{W_A}$、$\mathrm{W_B}$で表したとき、1 個の手工芸品を生産するのに要する単位生産時間が表 1 のように与えられている。また、手工芸品の生産量は$\mathrm{P_1}$が 40[個]以上、$\mathrm{P_2}$が 30[個]以上である。さらに、各作業者には 480 [分]以上の時間にわたり生産に従事するように生産量を割り当てることとし、480 [分]を超えるような生産量が割り当てられる場合には、表 2 に記載した単位時間当たり残業手当を支払うものとする。このとき、以下の問に答えよ。

表1 作業者毎の手工芸品の単位生産時間

作業者 ＼ 手工芸品	手工芸品$\mathrm{P_1}$	手工芸品$\mathrm{P_2}$
作業者$\mathrm{W_A}$	10 [分/個]	20 [分/個]
作業者$\mathrm{W_B}$	15 [分/個]	20 [分/個]

表2 各作業者の単位時間当りの残業手当

作業者	単位時間当り残業手当
作業者$\mathrm{W_A}$	40 [円/分]
作業者$\mathrm{W_B}$	36 [円/分]

問3-1　作業者$\mathrm{W_A}$による手工芸品$\mathrm{P_1}$、$\mathrm{P_2}$の生産量を、それぞれX_{A1}、X_{A2}で表す。同様に、作業者$\mathrm{W_B}$による手工芸品$\mathrm{P_1}$、$\mathrm{P_2}$の生産量を、それぞれX_{B1}、X_{B2}で表す。このとき、上記の問題設定を満足するという制約条件で、2 人の作業者に支払う残業手当の和を最小化するようなX_{A1}、X_{A2}、X_{B1}、X_{B2}の決定問題を、線形計画問題として定式化せよ。

問3-2　問 3-1 で定式化した問題を原問題としたとき、その原問題に対する双対問題を記せ。

問3-3　問 3-1 で定式化した問題に対する最適なX_{A1}、X_{A2}、X_{B1}、X_{B2}と、最適解において作業者に支払う残業手当の和を記せ。ただし、最適なX_{A1}、X_{A2}、X_{B1}、X_{B2}は、原問題ないし双対問題を解くことで導出すること。

手工芸品:handicraft, 作業者:worker, 生産量:production quantity,
所定内労働時間:official working hours, 残業:overtime work, 費用:cost,
線形計画法:linear programming, 単位生産時間:unit production time, 残業手当:overtime allowance,
制約:constraint, 和:sum, 最小化:minimize, 線形計画問題:linear programming problem,
原問題:primal problem, 双対問題:dual problem, 最適な:optimal,
原問題ないし双対問題を解くことで:by solving the primal or dual problem

選択問題

情報学専攻

科目の番号

3　離散数学

注意：離散数学の問 **1**, 問 **2** はマークシートに解答しなさい．
解答にあたっては，$\boxed{1}$ ～ $\boxed{25}$ に当てはまる選択肢を，以下の選択肢（記号）（変数と式）（用語）から選びなさい．
また，順不同の箇所はどの順序で解答しても正解とする．

選択肢（記号）：⓪ $=$ ① $\leq$ ② $\geq$ ③ $>$ ④ $<$ ⑤ $\forall$ ⑥ $\exists$ ⑦ $\Rightarrow$ ⑧ $\Leftarrow$ ⑨ $\subseteq$

選択肢（変数と式）：⓪ 1 ① n ② p ③ i ④ j ⑤ $i = j$ ⑥ $i \neq j$ ⑦ $f(i) = f(j)$ ⑧ $f_{p,n}(i) = f_{p,n}(j)$ ⑨ $f_{p,n}(i)$

選択肢（用語）：⓪ 全射 (surjection) ① 単射 (injection) ② 全単射 (bijection) ③ 互いに素 (coprime) ④ 素数 (prime) ⑤ 数学的帰納法 (mathematical induction) ⑥ 鳩の巣原理 (pigeonhole principle) ⑦ ド・モルガンの法則 (De Morgan's laws) ⑧ 必要条件 (necessary condition) ⑨ 十分条件 (sufficient condition)

問 1.　p を任意の素数，n を p の倍数でない任意の自然数とする．$[p-1] := \{0, 1, \ldots, p-1\}$ と定義し，写像 $f_{p,n} : [p-1] \longrightarrow [p-1]$ を次で定める．

$$f_{p,n}(x) = nx \bmod p$$

写像 $f_{p,n}$ は全単射であることを，以下の手順で示す．

倍数：multiple, 自然数：natural number, 写像：map

【次のページへ続く】

選択問題

情報学専攻

科目の番号

3 離散数学

【前のページから】

(1) $f_{p,n} : [p-1] \longrightarrow [p-1]$ が $\boxed{1}$ であることを示す．

$f_{p,n}$ が $\boxed{1}$ であることの定義は，

$$\boxed{2}\, i, \boxed{3}\, j \in [p-1], \quad \boxed{4} \Rightarrow \boxed{5} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{①}$$

である．式①は，次のように示すことができる：

$$\boxed{4} \Longleftrightarrow \boxed{6}\boxed{7} \equiv \boxed{6}\boxed{8} \pmod p$$
$$\Longleftrightarrow \boxed{7} \equiv \boxed{8} \pmod p$$
$$\left(\because\ \boxed{9}\ \text{と}\ \boxed{10}\ \text{が}\ \boxed{11}\ \text{だから．}\right)$$

$\boxed{7}, \boxed{8} \in [p-1]$ であることから， $\boxed{5}$ がいえる．

(2) $f_{p,n} : [p-1] \longrightarrow [p-1]$ が $\boxed{12}$ であることを示す．

$f_{p,n}$ の像 $\mathrm{Im} f_{p,n}$ は次で与えられる：

$$\mathrm{Im} f_{p,n} = \left\{ \boxed{13} \mid i \in [p-1] \right\}$$

写像 $f_{p,n}$ が $\boxed{1}$ であることに注意すれば，$f_{p,n}$ の始集合と $\mathrm{Im} f_{p,n}$ の関係から，

$$\sharp \mathrm{Im} f_{p,n}\ \boxed{14}\ p \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{②}$$

が成立する．ただし，集合 A に対して $\sharp A$ で集合 A の要素数を表す．

写像 $f_{p,n}$ の終集合と像の関係を考えると，式②は写像 $f_{p,n}$ が $\boxed{12}$ であることを意味する．

(3) (1), (2) をあわせて考えると，$f_{n,p}$ は全単射であることが分かる．

定義：definition, 像：image, 始集合：domain, 集合：set, 要素数：cardinality, 終集合：codomain

【次のページへ続く】

選択問題

情報学専攻

科目の番号

3　離散数学

【前のページから】

問 2.　以下の命題 $(*)$ を示したい．

$(*)$ n 人の参加者がパーティに参加している．このパーティには友達の人数が同じ参加者が少なくとも二人いる．

ただし，n 人の参加者を $P_1, P_2, \ldots, P_n$ としたとき，参加者 P_i が参加者 P_j $(i \neq j)$ と友達なら，P_j と P_i も友達であるとする．また，P_i は P_i 自身と友達である，すなわち，任意の参加者 P_i の友達は一人以上である．

証明：P_i の友達の数を $f(i)$ と書く．このとき，命題 $(*)$ は次のように書くことができる：

$$\boxed{15}\, n, \boxed{16}\, i, \boxed{17}\, j, \quad \boxed{18} \wedge \boxed{19} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{③}$$

次の二つの状況を考える．

(a) $\boxed{20}$ i, $f(i) = 1$ のとき，次が成り立つ．

$$f(\{1, 2, \ldots, n\}) \subseteq \{1, 2, \ldots, n\} \setminus \left\{\boxed{21}\right\}$$

(b) $\boxed{22}$ i, $f(i) \neq 1$ のとき，次が成り立つ．

$$f(\{1, 2, \ldots, n\}) \subseteq \{1, 2, \ldots, n\} \setminus \left\{\boxed{23}\right\}$$

(a), (b) いずれの場合も，

$$(f \text{ の始集合の要素数})\ \boxed{24}\ (f \text{ の像の要素数})$$

であるから，$\boxed{25}$ により式 ③が成り立つので，命題 $(*)$ がいえる．

命題：proposition, 証明：proof

【次のページへ続く】

選択問題

情報学専攻

科目の番号

3　離散数学

【前のページから】

注意：離散数学の**問 3, 問 4** は記述式の問題です．
解答用紙 5 ページと 6 ページを使って解答すること．

問 3.

次の命題はどれも常には成立しない．反例を示せ．

(1) $(\forall x P(x)) \lor (\forall x Q(x)) \iff \forall x(P(x) \lor Q(x))$

(2) $\exists x(ax^2 + bx + c = 0) \iff b^2 - 4ac \geq 0$　（x, a, b, c はすべて実数）

問 4.

数学的帰納法を用いて，以下の等式が成り立つことを証明せよ．ただし，n は正の整数とする．

(1) $1 + 2 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

(2) $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + \cdots + n)^2$

反例：counterexample, 実数：real number, 等式：equation, 正の整数：positive integer

【離散数学の問題はここまで】

大学院情報理工学研究科　博士前期課程：一般入試（2019 年 8 月 16 日実施）

選択問題

情報学専攻

科目の番号

4 計算機工学 [4-1]

1. 次の文法について、以下の問いに答えなさい。ただし、以下の文法の非終端記号は S、終端記号は $0, 1$ とし、開始記号は S とする。

$$S \to 0S1,\ S \to 01$$

(1) この文法が生成する長さ 5 以上の終端記号列を 1 つ書きなさい。答だけでなく、導出の過程も示すこと。

(2) この文法が生成するのはどのような言語か？文章で説明しなさい。

2. 次の文法について、以下の問いに答えなさい。ただし、以下の文法の非終端記号は S, A, B、終端記号は $3, +, *, (,)$ とし、開始記号は S とする。

$$S \to S + A,\ S \to A,\ A \to A * B,\ A \to B,$$
$$B \to (S),\ B \to 3$$

(1) この文法が生成する長さ 10 以上の終端記号列を 1 つ書きなさい。答だけでなく、導出木も示すこと。

(2) この文法を用いて、$3 * (3 + 3)$ の上昇型解析をなるべく詳細に記述しなさい。

3. 「a または b に続いて、a が 0 個以上並び、さらに、その後に b が 1 個だけ続く形の記号列」が 0 回以上、繰り返し並んだような記号列（例えば、$babbaab$ など）全体の集合（言語）について、以下の問いに答えなさい。

(1) この言語に属する、上記以外の記号列を 3 つ書きなさい。

(2) この言語を受理する有限オートマトンの状態遷移関数を正確に書き、かつ、その状態遷移図を図示しなさい。ただし、この有限オートマトンの初期状態は q_0 とする。最終状態は二重丸で示すこと。また、状態数が最小の決定性有限オートマトンの状態遷移図を描くこと。

(3) この言語を生成する文法を記述しなさい。

文法 : grammar, 非終端記号 : nonterminal symbol, 終端記号 : terminal symbol, 開始記号 : start symbol, 上昇型解析 : bottom up parsing, 有限オートマトン : finite automaton, 状態遷移関数 : state transition function

選択問題

情報学専攻

科目の番号

4　計算機工学 [4-2]

1. 以下の問いに答えよ．特に断りがない限り数値は符号なし整数である．

(1) 10 進数の 2019 を 16 進数で書け．

(2) 2 進数の $(1111\ 1010\ 1011)_2$ を 8 進数で書け．

(3) 2 の補数で 10 進数の負数 -4096 を表すのに必要な最小ビット数を答えよ．

2. 4 バイトの符号なし整数 x, y, z について，以下の問いに答えよ．

(1) x の最大値を答えよ．

(2) 積和演算 $xy + z$ の結果を表わすのに必要な最小ビット数を答えよ．

(3) (2) で書いた解答が正しいことを証明せよ．

3. 命令キャッシュとデータキャッシュが独立に搭載された CPU で，あるプログラムを実行した．このときのキャッシュミス率は，命令キャッシュとデータキャッシュでそれぞれ 2% と 8% であった．また，プログラムにおけるロード命令及びストア命令の出現頻度は，合計で 38% であった．1 命令の実行に必要なクロックサイクル数は，メモリストールなしで 2 クロックサイクルであるが，キャッシュミスが生じた場合には，常に 50 クロックサイクルのミスペナルティが余計に必要となる．以下の問いに答えよ．

(1) プログラム実行時に，命令キャッシュミスとデータキャッシュミスにより余計に生じたクロックサイクル数の合計を答えよ．ただし，プログラムで実行された命令の合計数を N とする．

(2) CPU 実行時間を求めよ．ただし，同じプログラムを実行したときに，命令キャッシュミスもデータキャッシュミスも全く発生しないと仮定した CPU 実行時間を 100 とする．

(3) CPU のクロック周波数を 4 倍にしたとき，CPU 実行時間はどのくらいになるか？ただし，キャッシュミスを処理する絶対時間は変わらないものとする．

(4) (3) の解答に基づき，CPU のクロック周波数が CPU 性能に与える影響を説明せよ．

符号なし整数: unsigned integer, 10 進数: digit number, 16 進数: hexadecimal number, 2 進数: binary number, 8 進数: octal number, 2 の補数: 2's complement, 最小ビット数: minimal number of bits, 積和演算: multiply-accumulate operation, 命令キャッシュ: instruction cache, データキャッシュ: data cache, 独立に: independently, プログラム: program, 実行: execution, キャッシュミス率: cache miss rate, 出現頻度: frequency, 合計: total, メモリストール: memory stall, ミスペナルティ: miss penalty, 絶対時間: absolute time