大学院情報理工学研究科　博士前期課程：一般入試（2025 年 8 月 19 日実施）

情報・ネットワーク工学専攻　必須問題　解答例

　必須問題では、基礎的な知識や理解を問う問題を出題しました。解答が数式または数値で明記できるものについて、その一例を以下に示しますが、これと同等な他の表現もありえます。

「線形代数」

$\boxed{1}$

(1) $\begin{bmatrix} -4 \\ 1 \\ 5 \\ -2 \end{bmatrix}$

(2) $-1, 3$

(3) $\alpha = \beta = \gamma = -1$

(4) $k = -7$

(5) $M = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 5 & -1 \\ -2 & 7 \end{bmatrix}$

「微分積分」

$\boxed{2}$

(1) (i) $y = 2x$

(ii) $f(x, y)$ は点 $(1, 1)$ で極小値 -1 をとる.

(2) (i) $\dfrac{1}{45}$

(ii) $\dfrac{4}{15}$

(iii) $\dfrac{1}{2}\log 2 - \dfrac{1}{4}$

大学院情報理工学研究科　博士前期課程：一般入試（2025 年 8 月 19 日実施）

情報・ネットワーク工学専攻　選択問題　解答例

　選択問題では、専門的な知識や理解を問う問題を出題しました。解答については、その一例を以下に示しますが、これと同等な他の表現もありえます。

$\boxed{1}$　電気回路

(1)

$$Y=\frac{R_1}{R_1^2+\omega^2L^2}+\frac{R_2}{R_2^2+\left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}+j\left(\frac{-\omega L}{R_1^2+\omega^2L^2}+\frac{\frac{1}{\omega C}}{R_2^2+\left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}\right)$$

(2)

$$\omega=\sqrt{\frac{1}{LC}\cdot\frac{L-CR_1^2}{L-CR_2^2}}\quad(\omega>0)$$

(3)

$$(1+\sqrt{3})R$$

(4)

$$i=\frac{E}{R_0(R_0+R_1)}\left(R_0+R_1\mathrm{e}^{-\frac{R_0+R_1}{R_0R_1C_1}t}\right)$$

$\boxed{2}$ 電磁気学

1. (a) $m\dfrac{dv_x}{dt} = 0$

$$m\frac{dv_y}{dt} = eB_0 v_z$$

$$m\frac{dv_z}{dt} = \frac{eV}{d} - eB_0 v_y$$

(b) $v_x = 0$

$$v_y = \frac{V}{B_0 d}\left(1 - \cos\frac{eB_0}{m}t\right)$$

$$v_z = \frac{V}{B_0 d}\sin\frac{eB_0}{m}t$$

(c) $B_0 \leqq \dfrac{1}{d}\sqrt{\dfrac{2mV}{e}}$

2. (a) $\dfrac{2\pi\varepsilon_0 LV}{\log\frac{b}{a}}$

(b) $V' = \dfrac{L}{x(\varepsilon_r - 1) + L}V$

(c) 大きさ: $F = \dfrac{\pi\varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)L^2V^2}{\{x(\varepsilon_r - 1) + L\}^2 \log\frac{b}{a}}$

向き: x が増える方向

3. (a) $L = \dfrac{\mu_0}{\pi}\log\dfrac{d-a}{a} \approx \dfrac{\mu_0}{\pi}\log\dfrac{d}{a}$

(b) $L_i = \dfrac{\mu_0}{4\pi}$

(c) $F_m = \dfrac{\mu_0}{2\pi d}\left(\dfrac{V}{R}\right)^2$

(d) $R = \dfrac{1}{\pi}\sqrt{\dfrac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\log\dfrac{d-a}{a} \approx \dfrac{1}{\pi}\sqrt{\dfrac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\log\dfrac{d}{a}$

$\boxed{3}$ 確率統計

(1) $M_X(t) = \sum_{x=0}^{m_1} \binom{m_1}{x} (qe^t)^x (1-q)^{m_1-x} = (qe^t + 1 - q)^{m_1}$

(2) $E[X] = \frac{d}{dt} M_X(t)|_{t=0} = m_1 q$

$V[X] = E[X^2] - E[X]^2 = [m_1(m_1-1)\,q^2 + m_1 q] - (m_1 q)^2 = m_1 q(1-q)$

(3) 尤度 $\mathrm{L} = \binom{m_1}{x} q^x (1-q)^{m_1-x}$ より，$\frac{d \log L}{dq} = 0$ とおいて解くと

q の最尤推定量は $\frac{x}{m_1}$

(4) $f_{Q|X=x}(q) \propto P(X=x|Q=q) f_Q(q) \propto q^{x+\alpha-1}(1-q)^{m_1-x+\beta-1}$

$\propto \frac{1}{B(x+\alpha, m_1-x+\beta)} q^{x+\alpha-1}(1-q)^{m_1-x+\beta-1}$

よって，$\alpha' = x+\alpha$，$\beta' = m_1 - x + \beta$

(5) $P(Y=y \mid X=x) = \int_0^1 \binom{m_2}{y} q^y (1-q)^{m_2-y} \frac{1}{B(\alpha',\beta')} q^{\alpha'-1}(1-q)^{\beta'-1} dq$

$= \binom{m_2}{y} \frac{1}{B(\alpha',\beta')} \int_0^1 q^{y+\alpha'-1}(1-q)^{m_2-y+\beta'-1} dq$

$= \binom{m_2}{y} \frac{B(y+\alpha', m_2-y+\beta')}{B(\alpha',\beta')}$

$= \binom{m_2}{y} \frac{B(y+x+\alpha, m_2-y+m_1-x+\beta)}{B(x+\alpha, m_1-x+\beta)}$

(6) $P(S=s \mid Q=q) = \sum_{k=0}^{s} \binom{m_1}{k}\binom{m_2}{s-k} q^s (1-q)^{m_1+m_2-s}$

恒等式より，$P(S=s \mid Q=q) = \binom{m_1+m_2}{s} q^s (1-q)^{m_1+m_2-s}$

よって，S は二項分布に従う．

$\boxed{4}$ 信号処理

(1) 等比数列の和の公式を使って以下のように計算できる．

$$
\begin{aligned}
H(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]z^{-n} = 1 + (-0.5)z^{-1} + (-0.5)^2 z^{-2} + \cdots \\
&= \frac{1}{1+0.5z^{-1}} \quad (\text{収束領域は } |z| > 0.5)
\end{aligned}
$$

(2) 等比数列の和の公式を使って以下のように計算できる．

$$
\begin{aligned}
G(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} g[n]z^{-n} = z^{-1} + 0.8z^{-2} + 0.8^2 z^{-3} + \cdots \\
&= \frac{z^{-1}}{1-0.8z^{-1}} \quad (\text{収束領域は } |z| > 0.8)
\end{aligned}
$$

(3) z 変換の線形性により，

$$
\begin{aligned}
K(z) = H(z) + G(z) &= \frac{1}{1+0.5z^{-1}} + \frac{z^{-1}}{1-0.8z^{-1}} \\
&= \frac{1+0.2z^{-1}+0.5^{-2}}{1-0.3z^{-1}-0.4^{-2}} \quad \text{と書き表せる．}
\end{aligned}
$$

これを，図 1 のディジタルフィルタの伝達関数 $b0 \dfrac{1+rz^{-1}+sz^{-2}}{1-pz^{-1}-qz^{-2}}$ と比較することで，

$\{b_0,\ p,\ q,\ r,\ s\} = \{1,\ \ 0.3,\ \ 0.4,\ \ 0.2,\ \ 0.5\}$

(4) $f[n]$ は，系列 $k[n]$ の $k[0]$ を本来の値 1 から β に変更したものである．
このことより，単位パルス $\delta[n]$ を用いて，$f[n] = k[n] + (\beta-1)\delta[n]$ と書き表すことができる．
ここで，インパルス応答として $u[n] = (\beta-1)\delta[n]$ を持つディジタルフィルタの伝達関数を $U(z)$ とすれば，$U(z) = \beta - 1$ である．以上より，

$$
\begin{aligned}
F(z) = K(z) + U(z) &= \frac{1+0.2z^{-1}+0.5^{-2}}{1-0.3z^{-1}-0.4^{-2}} + (\beta-1) \\
&= \beta\,\frac{1+(\frac{0.5}{\beta}-0.3)z^{-1}+(\frac{0.9}{\beta}-0.4)z^{-2}}{1-0.3z^{-1}-0.4^{-2}}
\end{aligned}
$$

となる（ここで $\beta \neq 0$ の条件を使っている）．よって，

$\{b_0,\ p,\ q,\ r, r\ s\} = \{\beta,\ \ 0.3,\ \ 0.4,\ \ \dfrac{0.5}{\beta} - 0.3,\ \ \dfrac{0.9}{\beta} - 0.4\}$

(5) 直流信号に対応する伝達関数は，$z = e^{j\omega}$ において ω に 0 を代入したときの値であるので，
$F(1) = 0$ となるように β を決めれば良い．

$$
1 + (\frac{0.5}{\beta} - 0.3)z^{-1} + (\frac{0.9}{\beta} - 0.4)z^{-2}\Big|_{z=1} = 0 \ \text{ より}
$$

$$
1 + (\frac{0.5}{\beta} - 0.3) + (\frac{0.9}{\beta} - 0.4) = 0 \ \text{ が導かれ，これより}
$$

$$
\beta = -\frac{14}{3}
$$

$\boxed{5}$ アルゴリズムとデータ構造

問１． このグラフの５つの辺を重みに応じてそれぞれ$e_1, e_2, e_3, e_4, e_{10}$と表すものとする。下付き文字がその辺の重みを表している。ハミルトン閉路は同じ頂点を２回以上訪問出来ないのだから、e_2を含んではいけない。4 頂点グラフ上のハミルトン閉路は４つの（異なる）辺から構成されなければならないから、残りの全ての辺を含む必要がある。よってこのグラフの（唯一の）ハミルトン閉路は$a \to e_3 \to b \to e_1 \to c \to e_4 \to d \to e_{10} \to a$であり、その重みは 18 である。

問２． 最初の 2 ステップでは辺e_1, e_2がそれぞれ選ばれ、それらにより３頂点 a, b, c からなる部分木が得られる。次に重みが小さいe_3はこの木の中の 2 つの頂点を結んでいるので選ばれない。次にe_4によりこの木と頂点 d (のみからなる木) が連結される。これで全ての頂点を含む木が得られたので、これ以上どのような辺を導入しても閉路が形成されてしまう。よってe_{10}は追加されない。

問３． G上の最小重みハミルトン閉歩道（重みw^*）から１本以上の辺を除去して得られるグラフは、Gが負の重みをもつ辺を含まないのだからGより軽い。さて、このハミルトン閉歩道を深さ優先探索して得られる木Tは探索元の閉歩道上の辺しか含まないので$\delta(T) \le w^*$を満たし、その上Gの全ての頂点を通過する、すなわちGの全域木である。

問４． 任意の頂点から始めてT^*を深さ優先探索すると閉歩道c^*が得られる。深さ優先探索で得られたこの閉歩道はT^*の全ての辺をちょうど 2 回通過する。よって$\delta(c^*) \le 2\delta(T^*) \le 2w^*$となる。

6 計算機の基本原理

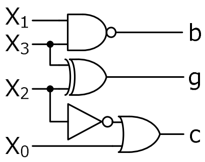
1. 右表からこの LFSR のサイクルは 6.
従って 16(=6×2+4)クロック後は 4 クロック後と同じとなり，
$\{X_0, X_1, X_2, X_3\}=\{1, 0, 1, 0\}$

CLK	X_0	X_1	X_2	X_3
0	1	0	0	0
1	0	1	0	0
2	0	0	1	0
3	0	0	0	1
4	1	0	1	0
5	0	1	0	1
6	1	0	0	0

2. (i)

X_0	X_1	X_2	X_3	a	b	c	d	e	f	g
1	0	0	0	1	1	1	1	1	1	0
0	1	0	0	0	1	1	0	0	0	0
0	0	1	0	1	1	0	1	1	0	1
0	0	0	1	1	1	1	1	0	0	1
1	0	1	0	0	1	1	0	0	1	1
0	1	0	1	1	0	1	1	0	1	1

(ii)



$$b = \overline{X_1 \cdot X_3}$$
$$g = X_2 \ (+) \ X_3$$
$$c = X_0 + \overline{X_2}$$

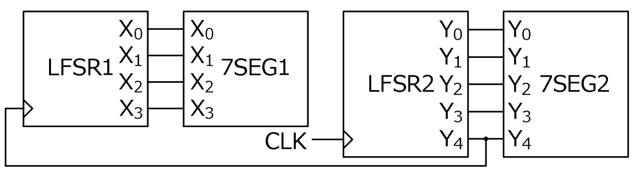
3. $\{Y_1, Y_2, Y_3, Y_4\}=\{0, 0, 0, 0\}$ とならないこと.
それ以外の値は全て周期 5 となり，Y_0 が周期 2 なので全体で周期 10(=5×2)となる.

CLK	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4
0	1	0	0	0
1	0	1	0	0
2	0	0	1	0
3	0	0	0	1
4	1	1	1	1
5	1	0	0	0

CLK	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4
0	1	1	0	0
1	0	1	1	0
2	0	0	1	1
3	1	1	1	0
4	0	1	1	1
5	1	1	0	0

CLK	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4
0	1	0	1	0
1	0	1	0	1
2	1	1	0	1
3	1	0	0	1
4	1	0	1	1
5	1	0	1	0

4. 下図のように配線し，出力 Y_1～Y_4 のうちの任意の 1 本 Y_i を LFSR1 のクロック入力に接続する.
LFSR2 は，10 クロックの間に Y_i が 1 回だけ 0→1→0 とトグルするようなデータをレジスタにセットする.
7SEG2 は，Y_i が 0→ 1 と変化するときに表示が 0 になるように内部のデコーダを設計する.



$\boxed{7}$ 数値計算

1. 式 (1) から式 (2) を辺々引くと，
$$f(\alpha+h)-f(\alpha-h)=2hf'(\alpha)+\frac{2h^3}{3!}f'''(\alpha)+O(h^5).$$
これより，
$$f'(\alpha)=\frac{f(\alpha+h)-f(\alpha-h)}{2h}-\frac{h^2}{6}f'''(\alpha)+O(h^4)$$
であるから，次の近似式を得る．
$$f'(\alpha)\simeq\frac{f(\alpha+h)-f(\alpha-h)}{2h}.$$
誤差の主要項は $-\frac{h^2}{6}f'''(\alpha)$ である．

2. 式 (1) の 4 倍から次の式
$$f(\alpha+2h)=f(\alpha)+2hf'(\alpha)+\frac{(2h)^2}{2}f''(\alpha)+\frac{(2h)^3}{3!}f'''(\alpha)+\frac{(2h)^4}{4!}f''''(\alpha)+\cdots,$$
を引いて h^2 のオーダーの項を消去し，得られる式を $f'(\alpha)$ について解くと，
$$f'(\alpha)=\frac{-3f(\alpha)+4f(\alpha+h)-f(\alpha+2h)}{2h}+\frac{h^2}{3}f'''(\alpha)+O(h^3).$$
これより，次の近似式を得る．
$$f'(\alpha)\simeq\frac{-3f(\alpha)+4f(\alpha+h)-f(\alpha+2h)}{2h}$$
誤差の主要項は $\frac{h^2}{3}f'''(\alpha)$ である．

3. $f''(\alpha)$ に対する 2 次精度の近似式を得るには，$f'(\alpha)$ を消去する必要がある．また，h^2 で割ったときに 1 次の項が残ってはならないので，h^3 の項も消去する必要がある．これは明らかに $f(\alpha)$ と $f(\alpha+h)$ のみでは不可能なので，$n\geq 3$ として考える．
まず $n=3$ として，$f(\alpha)$, $f(\alpha+h)$, $f(\alpha+2h)$ を使った近似式が可能かを考える．a,b,c を定数とすると，式 (1), (2), (10) より，
$$\begin{aligned}&af(\alpha)+bf(\alpha+h)+cf(\alpha+2h)\\&=(a+b+c)f(\alpha)+(b+2c)hf'(\alpha)+\frac{(b+4c)h^2}{2}f''(\alpha)+\frac{(b+8c)h^3}{6}f'''(\alpha)+O(h^4).\end{aligned}$$
ここで，$f'(\alpha)$ と h^3 の項を消去するには $b+2c=0$, $b+8c=0$ である必要があるが，このとき $b=c=0$ となり，$f''(\alpha)$ の係数も 0 となってしまって $f''(\alpha)$ を求めることができない．したがって，$n=3$ は不適である．
次に $n=4$ の場合を考える．a,b,c,d を定数とすると，
$$\begin{aligned}&af(\alpha)+bf(\alpha+h)+cf(\alpha+2h)+df(\alpha+3h)\\&=(a+b+c+d)f(\alpha)+(b+2c+3d)hf'(\alpha)+\frac{(b+4c+9d)h^2}{2}f''(\alpha)\\&\quad+\frac{(b+8c+27d)h^3}{6}f'''(\alpha)+O(h^4).\end{aligned}$$

この右辺において，$f(\alpha)$, $f'(\alpha)$ の係数が 0，$f''(\alpha)$ の係数が 1，h^3 の項が 0 であればよい．そのための条件は，

$$\begin{cases} a+b+c+d & = 0, \\ \quad b+2c+3d & = 0, \\ \quad b+4c+9d & = 2/h^2, \\ \quad b+8c+27d & = 0. \end{cases}$$

これを解くと，$a = 2/h^2$, $b = -5/h^2$, $c = 4/h^2$, $d = -1/h^2$ が得られる．したがって，n の最小値は 4 であり，近似式は次のように得られる．

$$f''(\alpha) \simeq \frac{2f(\alpha) - 5f(\alpha+h) + 4f(\alpha+2h) - f(\alpha+3h)}{h^2}.$$

4. 仮定に従うと，近似式 (4) に含まれる丸め誤差の上界は，

$$\frac{|f(\alpha)|\mathrm{u} + |f(\alpha)|\mathrm{u}}{h} = \frac{2|f(\alpha)|\mathrm{u}}{h}$$

となる．

5. 小問 4. の結果より，全体誤差は次のように書ける．

$$\frac{h}{2}|f''(\alpha)| + \frac{2|f(\alpha)|\mathrm{u}}{h} \geq 2\sqrt{\frac{h}{2}|f''(\alpha)| \cdot \frac{2|f(\alpha)|\mathrm{u}}{h}} = 2\sqrt{|f(\alpha)||f''(\alpha)|\mathrm{u}}.$$

等号が成立するのは，

$$\frac{h}{2}|f''(\alpha)| = \frac{2|f(\alpha)|\mathrm{u}}{h},$$

すなわち，

$$h = 2\sqrt{\frac{|f(\alpha)|}{|f''(\alpha)|}\mathrm{u}}$$

のときである．したがって，全体誤差を最小にする 最小値は
$2\sqrt{|f(\alpha)||f''(\alpha)|\mathrm{u}}$ となる．

$\boxed{8}$ 離散数学とオートマトン

(1) *Proof.* (反射律) 任意の $(a,b) \in A$ に対して，$ab = ba = ab$ より，$(a,b) \sim (a,b)$ となり反射律を満たす．

(対称律) 任意の $(a,b) \sim (c,d) \in A$ に対して，$(a,b) \sim (c,d)$ ならば，$ad = bc$ より，$cb = da$ となる．したがって，$(c,d) \sim (a,b)$ となり，対称律を満たす．

(推移律) 任意の $(a,b),(c,d),(e,f) \in A$ に対して，$(a,b) \sim (c,d)$ かつ $(c,d) \sim (e,f)$ ならば，(1)$ad = cb$ かつ (2)$cf = de$ となる．ここから，(1) の両辺に f をかけると，$adf = cbf$ が得られ，(2) の両辺に b をかけると，$bcf = bde$ となる．したがって，(3)$adf = bde$ となり，$d \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ より，(3) の両辺を d で割ると，$af = be$ より，$(a,b) \sim (e,f)$ となり，推移律を満たす．

(2) 次のすべての等式が成り立つため，これら 4 つの元はすべて同じ同値類に属する．

$$2 \cdot 6 = 12 = 4 \cdot 3 \iff (2,4) \sim (3,6),$$
$$2 \cdot 2 = 4 = 4 \cdot 1 \iff (2,4) \sim (1,2),$$
$$2 \cdot (-2) = -4 = 4 \cdot (-1) \iff (2,4) \sim (-1,-2).$$

(3) 定義より，$(a,b) \sim (c,d)$ ならば，$ad = bc$ となる．$b,d \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ より，$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ となる．したがって，(a,b) の同値類に含まれる要素は，0 でない整数 k を用いて，$\frac{ka}{kb}$ と書ける．したがって，(a,b) の同値類は，以下のように書ける．

$$[(a,b)] = \{(ka,kb) \in A \mid k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\}$$

(4) (a) *Proof.* 任意の $(a,b),(c,d) \in A$ に対して，$(a,b) \sim (c,d)$ ならば，$ad = bc$ となるので，

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow f(a,b) = f(c,d).$$

したがって，f は well-defined である．

(b) 誘導される写像は $\bar{f}([(a,b)]) = a/b$ と書ける．この誘導される写像 $\bar{f}$ が全単射であることを示す．

Proof. (全射性) 任意の $r \in \mathbb{Q}$ に対して，$a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ を用いて，$r = \frac{a}{b}$ と表すことができる．したがって，$r = \bar{f}([(a,b)])$ となるので，$\bar{f}$ は全射である．

(単射性) 任意の $[(a,b)],[(c,d)] \in A/\sim$ に対して，$\bar{f}([(a,b)]) = \bar{f}([(c,d)])$ ならば，$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ となる．したがって，$ad = bc$ より，$(a,b) \sim (c,d)$ となる．よって，$\bar{f}$ は単射である．

以上より，$\bar{f}$ は全単射となる．