大学院情報理工学研究科
博士前期課程一般入試　入学試験問題
（2025年8月19日実施）

【情報学専攻】

専門科目：［選択問題］

※注意事項

１．試験開始の合図があるまで問題冊子を開いてはいけない。

２．監督者が説明を始めたら筆記用具を持ったり、参考書を見たりしてはいけない。

３．選択問題の問題冊子はこの注意事項を含めて１５枚、解答用紙は７枚である。（マークシート１枚を含む）

４．試験開始の合図の後、全ての解答用紙に受験番号を記入すること。
マークシートに受験番号をマークする際には左詰めで記入し、氏名は記入しないこと。

５．選択問題の試験時間は130分である。

６．選択問題では、４科目の中から３科目を選んで解答すること。
また、選択した３科目は、選択科目記入シートに必ず○印を記入すること。
（採点は選択科目記入シートに○印が記入された科目についてのみ行う。誤記入、記入もれに十分注意すること。）
「確率・オペレーションズリサーチ」では、問２か問３を選択すること。

７．解答は、必ず当該科目の解答用紙を使用すること。
（解答用紙には問題番号が記入されているので、解答する科目番号が記入されている解答用紙を使用すること。「離散数学」問１～問３はマークシートを使用すること。）
また、解答用紙は裏面を使用してもよいが、その場合は表面下に「裏面へ続く」と記入すること。

８．選択科目記入シートは、試験終了後に必ず提出すること。

９．試験中に問題冊子の印刷不鮮明、ページの落丁・乱丁及び解答用紙の汚れ等に気付いた場合は、手を挙げて監督者に知らせること。

１０．試験終了後、この問題冊子は持ち帰ること。

１１．解答は英語でもよい。

問題は次のページからです。

このページは問題冊子の枚数には
含みません。

大学院情報理工学研究科　博士前期課程：一般入試（2025 年 8 月 19 日実施）

選択問題

情報学専攻

科目の番号

1　アルゴリズムとデータ構造

下記の C 言語のコードを参照し，問いに答えなさい．

```
void SWAP(int *a, int *b)
{
  int t = *a; *a = *b; *b = t;
}

void min_sift_up(int i, int h[])
{
  while(i > 0){
    int p = (i-1) / 2;
    if([   A   ])    break;
    SWAP(&h[p], &h[i]);
    i = p;
  }
}

void min_sift_down(int i, int h[], int sz)
{
  while( 1 ){
    int l = 2*i+1, r = 2*i+2, j = i;
    if(l < sz && [   B   ])    j = l;
    if(r < sz && [   C   ])    j = r;
    if(j == i)    break;
    SWAP(&h[i], &h[j]);
    i = j;
  }
}
```

```
int min_sz = 0;
int min_h[K]; // K はヒープの大きさ

void min_push(int x)
{
  if(min_sz >= K)        return;
  min_h[min_sz] = x;
  min_sift_up(min_sz++, min_h);
}

int min_pop()
{
  int ret = min_h[0];
  min_h[0] = min_h[--min_sz];
  min_sift_down(0, min_h, min_sz);
  return ret;
}

void min_push_wrapper(int x)
{
  if(min_sz < K)    min_push(x);
  else if(x > min_h[0]){
      [        D        ]
  }
}
```

プログラムコード１

1. プログラムコード１の min_push() 関数は，整数値 x を<u>最小値ヒープ</u>（<u>配列</u>を<u>ヒープ</u>として解釈すると，<u>親ノード</u>値が<u>子ノード</u>値より小さい）min_h[] に保持する．一方 min_pop() 関数は，最小値ヒープ min_h[] から最小値を取り出し，ヒープ構造を保つ．プログラム中の空欄 A～C に入る適切な記述を答えなさい．ただし，この問いではヒープの大きさ K は十分大きいものとする．
2. この問いでは，プログラムコード１に関して K=8 として考える．整数列 A1 ={10, 5, 7, 9, 12, 4, 8, 2}を順次 min_push() に与えた場合，min_h[] に保持される整数列を答えなさい．また，同様に整数列 A2={11, 6, 9, 7, 12, 4, 2, 8, 13, 1, 3, 10}についても答えなさい．

最小値ヒープ（Minimal-Heap)，配列(Array)，ヒープ（Heap），親ノード(Parent-node)，子ノード(Child-node)

【次ページへ続く】

【前ページからの続き】

3. プログラムコード１において，大きさ K のヒープが構成されているとき， min_pop()に必要な時間計算量を，K に関する Big-O 記法を用いて答えなさい．
4. 次に，長さ N の整数列から要素を一つずつ受取り，受け取った整数の中で，値が大きい方から K 個の整数値を min_h[] に保持していくことを考える．保持する関数として min_push_wrapper() を考える．この関数の空欄 D に当てはまる適切な表記を答えなさい．
5. 整数列を min_push_wrapper() 関数を用いて保持していき，N 番目の要素を受け取るまでに必要な時間計算量を，N と K に関する Big-O 記法を用いて答えなさい．ただし N は K に比べて十分大きいものとする．
6. 長さ N の整数列中で，値の大きい K 個を抽出する計算法としては，数列全体を配列として保存し，クイックソートを用いて降順にソートしたうえで，上位 K 個を選択する方法が考えられる．ここで $N=10^6$，$K=10^2$ としたときに，このソートを用いる方法は min_push_wrapper() 関数を用いて保持する場合と比較して，およそ何倍程度，速く，もしくは，遅くなるのかを答えなさい．

次にプログラムコード２のように，最小値ヒープ min_h[] に加えて，最大値ヒープ（配列をヒープとして解釈すると親ノードの値が子ノードより大きい）max_h[] を導入する．max_h[]への数値の出し入れは，プログラムコード１と同様な max_push()，max_pop() 関数を考えるものとする．なお，最大値ヒープ max_h[] に保持している要素数は max_sz で表すものとし，K は十分大きいものとする．

```
int min_sz=0, max_sz=0;
int min_h[K], max_h[K]; // K はヒープの大きさ

void median_push(int x)
{
  if(max_sz == 0 || x <= max_h[0]){
    max_push(x);
    if(max_sz > min_sz+1)
      min_push(max_pop());
  }
  else{
    min_push(x);
    if(min_sz > max_sz)
      max_push(min_pop());
  }
}
```

```
double get_median()
{
  double ret;
  if((min_sz + max_sz) % 2 == 0)
    ret = [    E    ];
  else
    ret = [    F    ];
  return ret;
}
```

プログラムコード２

7. 整数列 A3={1, 5, 2, 4, 3, 6, 8} を median_push() に順次与えていき，最後の要素を与えた時に得られる最小値ヒープ min_h[] と最大値ヒープ max_h[] を答えなさい．
8. median_push() に与えた整数の個数を奇数 2M+1 個とする．このとき min_h[] と max_h[] に保持されている要素数を，それぞれ M を用いて答えなさい．ただし K > 2M+1 として良い．
9. 整数列の要素を順次 median_push() へ与えていく．この時，今までに与えた整数の中央値を得るための関数 get_median() を考える．この関数の空欄部分 E, F の適切な記述を答えなさい．ただし中央値は数列中の大きさの順位が中央となる値を意味し，整数列の要素数が偶数個からなる場合は，中央順位２個の平均を取るものとする．

時間計算量(Time complexity)，最大値ヒープ(Max-Heap)，中央値(Median)

大学院情報理工学研究科　博士前期課程：一般入試（2025 年 8 月 19 日実施）

選択問題

情報学専攻

科目の番号

2　確率・オペレーションズリサーチ

この科目（確率・オペレーションズリサーチ）を受験する場合には，問 1 は必ず解答し，問 2 と問 3 はいずれか一方のみを選択して解答すること．

問 1　確率変数$X_1, X_2, \cdots$は互いに独立に，確率0.5で1をとり，確率0.5で-1をとる．また，1以上の自然数nに対して，$Y_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$と定める．このとき以下の問いに答えよ．

問 1-1：X_1の期待値と標準偏差を求めよ．
問 1-2：Y_nの期待値と標準偏差を求めよ．
問 1-3：$Y_{10000} > 300$となる確率を，中心極限定理を用いて近似的に求めよ．必要に応じて標準正規分布表を用いてもよい．
問 1-4：$Z_1 = X_1, Z_2 = \frac{1}{2}Z_1 + aX_2$と定める．このとき，$Z_2$と$Z_1 - Z_2$の相関係数が0になる$a$の値を求めよ．ただし，$a > 0$とする．
問 1-5：問 1-4 の相関係数が0になる場合において，Z_2と$Z_1 - Z_2$は独立であるか，理由とともに答えよ．

Keywords *確率変数: random variable, 互いに独立: mutually independent, 確率: probability, 自然数: natural number, 期待値: expected value, 標準偏差: standard deviation, 中心極限定理: central limit theorem, 近似: approximation, 標準正規分布表: standard normal distribution table, 相関係数: correlation coefficient, 独立: independent, 累積確率: cumulative probability*

（次ページへ続く）

（前ページから続く）

標準正規分布表（累積確率を記載）

Z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.50000	0.50399	0.50798	0.51197	0.51595	0.51994	0.52392	0.52790	0.53188	0.53586
0.1	0.53983	0.54380	0.54776	0.55172	0.55567	0.55962	0.56356	0.56749	0.57142	0.57535
0.2	0.57926	0.58317	0.58706	0.59095	0.59483	0.59871	0.60257	0.60642	0.61026	0.61409
0.3	0.61791	0.62172	0.62552	0.62930	0.63307	0.63683	0.64058	0.64431	0.64803	0.65173
0.4	0.65542	0.65910	0.66276	0.66640	0.67003	0.67364	0.67724	0.68082	0.68439	0.68793
0.5	0.69146	0.69497	0.69847	0.70194	0.70540	0.70884	0.71226	0.71566	0.71904	0.72240
0.6	0.72575	0.72907	0.73237	0.73565	0.73891	0.74215	0.74537	0.74857	0.75175	0.75490
0.7	0.75804	0.76115	0.76424	0.76730	0.77035	0.77337	0.77637	0.77935	0.78230	0.78524
0.8	0.78814	0.79103	0.79389	0.79673	0.79955	0.80234	0.80511	0.80785	0.81057	0.81327
0.9	0.81594	0.81859	0.82121	0.82381	0.82639	0.82894	0.83147	0.83398	0.83646	0.83891
1.0	0.84134	0.84375	0.84614	0.84849	0.85083	0.85314	0.85543	0.85769	0.85993	0.86214
1.1	0.86433	0.86650	0.86864	0.87076	0.87286	0.87493	0.87698	0.87900	0.88100	0.88298
1.2	0.88493	0.88686	0.88877	0.89065	0.89251	0.89435	0.89617	0.89796	0.89973	0.90147
1.3	0.90320	0.90490	0.90658	0.90824	0.90988	0.91149	0.91309	0.91466	0.91621	0.91774
1.4	0.91924	0.92073	0.92220	0.92364	0.92507	0.92647	0.92785	0.92922	0.93056	0.93189
1.5	0.93319	0.93448	0.93574	0.93699	0.93822	0.93943	0.94062	0.94179	0.94295	0.94408
1.6	0.94520	0.94630	0.94738	0.94845	0.94950	0.95053	0.95154	0.95254	0.95352	0.95449
1.7	0.95543	0.95637	0.95728	0.95818	0.95907	0.95994	0.96080	0.96164	0.96246	0.96327
1.8	0.96407	0.96485	0.96562	0.96638	0.96712	0.96784	0.96856	0.96926	0.96995	0.97062
1.9	0.97128	0.97193	0.97257	0.97320	0.97381	0.97441	0.97500	0.97558	0.97615	0.97670
2.0	0.97725	0.97778	0.97831	0.97882	0.97932	0.97982	0.98030	0.98077	0.98124	0.98169
2.1	0.98214	0.98257	0.98300	0.98341	0.98382	0.98422	0.98461	0.98500	0.98537	0.98574
2.2	0.98610	0.98645	0.98679	0.98713	0.98745	0.98778	0.98809	0.98840	0.98870	0.98899
2.3	0.98928	0.98956	0.98983	0.99010	0.99036	0.99061	0.99086	0.99111	0.99134	0.99158
2.4	0.99180	0.99202	0.99224	0.99245	0.99266	0.99286	0.99305	0.99324	0.99343	0.99361
2.5	0.99379	0.99396	0.99413	0.99430	0.99446	0.99461	0.99477	0.99492	0.99506	0.99520
2.6	0.99534	0.99547	0.99560	0.99573	0.99585	0.99598	0.99609	0.99621	0.99632	0.99643
2.7	0.99653	0.99664	0.99674	0.99683	0.99693	0.99702	0.99711	0.99720	0.99728	0.99736
2.8	0.99744	0.99752	0.99760	0.99767	0.99774	0.99781	0.99788	0.99795	0.99801	0.99807
2.9	0.99813	0.99819	0.99825	0.99831	0.99836	0.99841	0.99846	0.99851	0.99856	0.99861
3.0	0.99865	0.99869	0.99874	0.99878	0.99882	0.99886	0.99889	0.99893	0.99896	0.99900

（次ページへ続く）

（前ページから続く）

問 2　この問題を選択する場合には問３に解答してはいけない．

ある製品を使用開始してから故障するまでの時間Xの確率分布が，以下の確率密度関数を持つとする．

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & (x > 0) \\ 0 & (x \leq 0) \end{cases}$$

ここで$\lambda > 0$はパラメータであり，eは自然対数の底である．

問 2-1：確率変数Xが従う分布の名称を以下から選び記号で答えよ．
　A：正規分布，B：ベータ分布，C：ガンマ分布，D：指数分布，E：ポアソン分布
問 2-2：Xの期待値と分散を答えよ．この設問に限り結果のみでよい．
問 2-3：Xのモーメント母関数$M_X(t)$を求めよ．ただし，$t < \lambda$とする．
問 2-4：$0 < a < b$とする．$a < X \leq b$となる確率を求めよ．
問 2-5：$0 < a < b$とする．「$X > a$という条件のもとで，$X \leq b$となる条件付き確率」をP_1とおき，「$0 < X \leq b - a$となる確率」をP_2とおく．P_1とP_2の大小を比較せよ．

Keywords *製品: product, 故障: failure, 確率分布: probability distribution, 確率密度関数: probability density function, パラメータ: parameter, 自然対数の底: base of natural logarithm, 確率変数: random variable, 正規分布: normal distribution, ベータ分布: beta distribution, ガンマ分布: gamma distribution, 指数分布: exponential distribution, ポアソン分布: Poisson distribution, 期待値: expected value, 分散: variance, モーメント母関数: moment generating function, 確率: probability, 条件: condition, 条件付き確率: conditional probability, 比較: compare*

（次ページへ続く）

（前ページから続く）

問３　この問題を選択する場合には，問２に解答してはいけない．

10 万 m² の土地でナス，トマト，ピーマンの 3 種類の作物を栽培することを検討している．過去の記録から，ナスは 90 トン，トマトは 140 トン，ピーマンは 120 トンまでしか売れないことがわかっている．栽培費用，売値，収穫高は表 1 のとおりである．

このとき，与えられた制約条件下で，ナス，トマト，ピーマンの栽培により得られる総利益 z を最大化する生産計画問題を考える．以下の問に答えよ．

表 1　作物毎の栽培費用，売値，収穫高

作物	栽培費用［万円 / 万 m²］	売値［万円 / トン］	収穫高［トン / 万 m²］
ナス	400	40	25
トマト	900	35	40
ピーマン	800	60	30

問 3-1　ナス，トマト，ピーマンの作付面積を，それぞれ x_1, x_2, x_3［万 m²］とする（x_1, x_2, x_3 は共に非負）．このとき，総利益 z を最大にする生産計画問題を線形計画問題として定式化せよ．なお，制約条件はすべて不等式制約の形で記述すること．

問 3-2　問 3-1 で定式化した不等式制約を，スラック変数 x_4, x_5, x_6, x_7 を用いて等式制約に変換せよ．

問 3-3　問 3-1 で定式化した線形計画問題におけるナス，トマト，ピーマンの最適作付面積を，それぞれ x_1^*, x_2^*, x_3^*［万 m²］とする．この線形計画問題の最適作付面積 x_1^*, x_2^*, x_3^* とそのときの総利益 z^* をシンプレックス法により求めることを考える．このとき，解答欄にしたがってシンプレックス表を完成させ，最適作付面積 x_1^*, x_2^*, x_3^* と総利益 z^* を求めよ．シンプレックス表は，初期表から 4 回目の更新までの表を用意しているが，すべてを埋める必要があるとは限らない．なお，解答欄のシンプレックス表中の π_i の行の各値は，「基底変数の係数」の列と，対応する x_1 ～ x_7 および「定数項」の列の各要素の積の和で求められる．

Keywords　ナス：*eggplant*，トマト：*tomato*，ピーマン：*bell pepper*，作物：*crop*，栽培：*cultivate*，費用：*cost*，売値：*price*，収穫高：*harvest*，制約条件：*constraints*，総利益：*total profit*，最大化：*maximize*，生産計画問題：*production planning problem*，作付面積：*crop acreage*，非負：*non-negative*，線形計画問題：*linear programming problem*，定式化：*formulate*，不等式制約：*inequality constraints*，記述：*describe*，スラック変数：*slack variable*，等式制約：*equality constraints*，最適：*optimal*，シンプレックス法：*simplex method*，求める：*obtain*，完成：*complete*，初期：*initial*，更新：*update*，定数項：*constant term*，要素：*element*，積：*product*，和：*sum*

選択問題

情報学専攻

科目の番号

3 離散数学

注意： 離散数学の**問 1〜問 3** はマークシートに解答しなさい．
解答にあたっては，$\boxed{1}$ 〜 $\boxed{23}$ に当てはまる最も適切なものを，
選択肢から選びなさい．

問 1. 命題変数 P, Q, R の真偽をうまく選び，(1)〜(4) の各論理式を真としたい．選択肢から適切な番号を選び $\boxed{1}$ 〜 $\boxed{4}$ の箇所にマークせよ．ただし，F は偽を，T は真を表すものとする．

(1) $\neg P \wedge Q \wedge \neg R$ を真にする (P, Q, R) は $\boxed{1}$ である．

(2) $\neg(\neg Q \vee R \vee \neg P)$ を真にする (P, Q, R) は $\boxed{2}$ である．

(3) $(\neg\neg(Q \implies R) \wedge \neg(P \vee \neg R)) \wedge Q$ を真にする (P, Q, R) は $\boxed{3}$ である．

(4) $\neg(((\neg P \wedge R) \wedge Q) \implies \neg Q)$ を真にする (P, Q, R) は $\boxed{4}$ である．

選択肢：

⓪ $(P, Q, R) = (T, T, T)$	④ $(P, Q, R) = (F, T, T)$
① $(P, Q, R) = (T, T, F)$	⑤ $(P, Q, R) = (F, T, F)$
② $(P, Q, R) = (T, F, T)$	⑥ $(P, Q, R) = (F, F, T)$
③ $(P, Q, R) = (T, F, F)$	⑦ $(P, Q, R) = (F, F, F)$

命題変数：propositional variable，真：true，偽：false，論理式：logical expression

【次ページに続く】

選択問題

情報学専攻

科目の番号

3　離散数学

【前ページから続く】

問 2. a, b, c を正の整数とする．また，Prime(a) は「a は素数」であるときに真となる述語とする．次の空欄に当てはまるものを，以下の選択肢から選べ．

(1) Prime(c) は，以下のように表現できる．

$$(c > 1) \wedge \left(\neg \boxed{\ 5\ } \left((1 < a < c) \boxed{\ 6\ } (1 < b < c) \boxed{\ 7\ } (a \times b = c)\right)\right)$$

(2) 「素数は無限に存在する」は，以下のように表現できる．

$$\boxed{\ 8\ } \left((b > a) \boxed{\ 9\ } \mathrm{Prime}(b)\right)$$

(3) 「7 より大きい奇数は 3 個の素数の和で表せる」は，以下のように表現できる．

$$\boxed{\ 10\ } \Big(\left((a > 7) \wedge \mathrm{Odd}(a)\right) \boxed{\ 11\ } \exists b \exists c \exists d \big(\mathrm{Prime}(b) \wedge \mathrm{Prime}(c) \wedge \mathrm{Prime}(d) \wedge (a = b + c + d)\big)\Big)$$

ここで，Odd(a) は「a は奇数」であるときに真となる述語とする．

選択肢：
⓪ $\exists a$　① $\forall a$　② $\exists a \exists b$　③ $\exists a \forall b$　④ $\forall a \exists b$　⑤ $\forall a \forall b$　⑥ $\wedge$　⑦ $\vee$　⑧ $\Longrightarrow$

正の整数：positive integer，素数：prime number，述語：predicate，無限に：infinitely，奇数：odd number

【次ページに続く】

選択問題

情報学専攻

科目の番号

3 離散数学

【前ページから続く】

問 3.

(1) 要素数が n である集合 X に対して，写像の族 $\{f \mid f : X \to X\}$ を定める．このうち，全射でなく，かつ単射でもない写像の数は $\boxed{12} - \boxed{13}$ 個である．

選択肢： ⓪ n　① X　② n^2　③ X^2　④ n^n　⑤ X^X　⑥ 2^n　⑦ 2^X　⑧ $n!$　⑨ $X!$

(2) 集合 X, Y, Z に対して写像 $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ を考える．合成写像 $g \circ f : X \to Z$ について，以下の性質が常に成り立つか否かを答えよ．

- 「$g \circ f$ が単射の場合，f は単射である」は，$\boxed{14}$．
- 「$g \circ f$ が単射の場合，g は単射である」は，$\boxed{15}$．
- 「$g \circ f$ が全射の場合，f は全射である」は，$\boxed{16}$．
- 「$g \circ f$ が全射の場合，g は全射である」は，$\boxed{17}$．

選択肢： ⓪ 常に成り立つ　① 常に成り立つわけではない（反例が存在する）

(3) 集合 $\{\emptyset\}$，$\{1, \emptyset, \{a, b, \{c\}\}\}$，$\{1, 2, 3\}^{\{a,b\}}$ の要素数は，それぞれ $\boxed{18}$，$\boxed{19}$，$\boxed{20}$ である．

選択肢： ⓪ 0　① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5　⑥ 6　⑦ 7　⑧ 8　⑨ 9

要素数：cardinality, 集合：set, 写像：map, 族：family, 全射：surjection, 単射：injection, 合成写像：composite map, 性質：property, 反例：counterexample

【次ページに続く】

選択問題

情報学専攻

科目の番号

3　離散数学

【前ページから続く】

(4) 空でない，相異なる 3 つの集合 A, B, C に対して，$A \cap B = A \cap C \neq \emptyset \implies B = C$ は常に成り立つわけではない．その反例の中で，$|A| + |B| + |C|$ の最小値は $\boxed{21}$ となる．このとき $|A \cap B \cap C| = \boxed{22}$ であり，$|A \cup B \cup C| = \boxed{23}$ である．ただし，集合 X に対して，$|X|$ でその要素数を表す．

選択肢： ⓪ 0　① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5　⑥ 6　⑦ 7　⑧ 8　⑨ 9

空：empty，相異なる：different

【次ページに続く】

選択問題

情報学専攻

科目の番号

3　離散数学

【前ページから続く】

問 4. 集合 $X=\{0,1,\ldots,8\}$, $Y=\{0,1,\ldots,79\}$ に対して，写像の族 $F=\{f \mid f:X\to Y\}$ を考える．写像の族 $\tilde{F}$ を

$$\tilde{F}=\{\tilde{f} \mid \tilde{f}:(x_1,x_2)\mapsto(f(x_1)+f(x_2)) \bmod 80,\quad (x_1,x_2)\in X^2, f\in F\}$$

と定めたときに，$\tilde{F}$ に単射が存在するかを考えたい．ただし，「$m \bmod n$」は，m を n で割ったときの余りを意味する．以下の問いに答えよ．

(1) 写像 $\tilde{f}\in\tilde{F}$ が単射となる条件を，写像 f を用いずに記述せよ．

(2) 写像 $\tilde{f}\in\tilde{F}$ に対して $\tilde{f}:D\to Y$ と書いたとき，始集合 D の要素数を求めよ．

(3) 写像の族 $\tilde{F}$ に単射が存在するか．存在する場合にはそのような写像 f の例を示し，存在しない場合にはそれを証明せよ．

余り：remainder，条件：condition，始集合：domain，例：example

【次ページに続く】

選択問題

情報学専攻

科目の番号

3　**離散数学**

【前ページから続く】

問 5. 先手と後手が交互に石を取っていき，最後の石を取った人が勝ちとなる石取りゲームを考える．このゲームでは，取れる石の数がターンごとに 1 つずつ増えていくというルールがある：

- 1 ターン目：先手は 0 個または 1 個の石を取れる．
- 2 ターン目：後手は 0 個から 2 個の石を取れる．
- 3 ターン目：先手は 0 個から 3 個の石を取れる．
- 4 ターン目：後手は 0 個から 4 個の石を取れる．

このように，i 番目のターンでは，0 個から i 個の石を取れる．なお「0 個の石を取る」という行動は「何もせずにそのターンを終了」を意味し，この場合でもターン数は増えていく．ここで石の数を X 個とする．$X = 2025$ のとき先手が必ず勝つ戦略が存在することを確認したい．

(1) $X = 1, 4, 9$ のとき，後手の戦略によらず，先手が必ず勝つ戦略が存在することを示せ．

(2) $X = k^2$ (k は 1 以上の<u>整数</u>) のとき，後手の戦略によらず，先手が必ずちょうど $2k-1$ ターン目で勝つ戦略が存在することを<u>数学的帰納法</u>を用いて示せ．これにより，$2025 = 45^2$ であるので $X = 2025$ のとき先手が必ず勝つ戦略が存在することが確認できる．

整数：integer，数学的帰納法：mathematical induction

選択問題

情報学専攻

科目の番号

4　計算機工学

1. 以下の問いに答えよ．

(1) 8 進数の 2025 を 10 進数に変換せよ．

(2) 1 ビット全加算器を考える．入力信号 A，B 及びキャリー入力 C_{in} は 1 ビット信号とする．ここで，$+$ を論理和，$\cdot$ を論理積，$\oplus$ を排他的論理和として定義する．さらに，Propagate 信号を $P = A \oplus B$，Generate 信号を $G = A \cdot B$ と定義する．P，G 及び C_{in} を用いて，出力信号である和ビット S とキャリー出力 C_{out} をそれぞれ最小のブール式で表せ．

(3) 8 ビットの符号なしレジスタ R がある．最初に正の整数 x $(0 < x < 2^8)$ を R にロードする．次に R を 2 ビット左シフトした後に，R に x を加算する．演算はすべて 8 ビット幅で行う．このとき，オーバフローが発生しない最大の整数 x を 2 進数で表せ．

2. プロセッサ A は，L1 キャッシュと主記憶を搭載している．ヒット時間は「キャッシュからデータが読み出されるまでに要する時間」，ミスペナルティは「キャッシュミスが判明してから主記憶からデータが読み出されるまでに追加で要する時間」と定義する．L1 はライトバック方式で，0.5 ns の ECC の処理はヒット時間に含まれている．以下の各問いでは，L1 キャッシュのヒット時間が 1 ns，ミスペナルティが 20 ns とする．

(1) ヒット率が 96% であるとき，平均メモリアクセス時間を計算せよ．

(2) 平均メモリアクセス時間を 2 ns 以下に抑えることができる最大ミス率を求めよ．

問 1: 8 進数：Octal，10 進数：Decimal，1 ビット全加算器：1-bit full adder，入力信号：Input signal，キャリー入力：Carry-in，1 ビット信号：1-bit signal，論理和：Logical OR，論理積：Logical AND，排他的論理和：Logical XOR，出力信号：Output signal，和ビット：Sum bit，キャリー出力：Carry-out，ブール式：Boolean expression，符号なしレジスタ：Unsigned register，左シフト：Left shift，加算：Addition，演算：Operation，8 ビット幅：8-bit width，オーバフロー：Overflow，最大の整数：Maximum integer，2 進数：Binary

問 2: プロセッサ A：Processor A，L1 キャッシュ：L1 cache，主記憶：Main memory，ヒット時間：Hit time，キャッシュ：Cache，データ：Data，読み出される：Read out，ミスペナルティ：Miss penalty，キャッシュミス：Cache miss，ライトバック：Write-back，ECC：Error check and correction，ヒット率：Hit rate，平均メモリアクセス時間：Average memory access time，最大ミス率：Maximum miss rate

【次ページに続く】

選択問題

情報学専攻

科目の番号

4　計算機工学

【前ページから続く】

3. $\Sigma = \{a, b\}$ とする．Σ 上の言語 L を，奇数個の a と3の倍数個 (0 個を含む) の b を共に含む記号列からなる集合とする．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) 次の記号列のうち，L に属するものをすべて書け．
aaa, abb, bbb, $babb$, $abaab$, $bbaba$, $aaabab$, $ababba$, $bbaaab$

(2) L を受理する状態数 6 の決定性有限オートマトンを $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ とする．ここで，M の状態集合を $Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4, q_5\}$ とし，状態遷移関数の一部を $\delta(q_0, a) = q_1$, $\delta(q_0, b) = q_2$, $\delta(q_2, a) = q_3$, $\delta(q_2, b) = q_4$ とするとき，M の状態遷移図を描け．その際，初期状態 q_0 を二重矢印 (⇒) で指し，最終状態は二重丸 (◎) で囲むこと．

(3) M の状態遷移関数 δ をすべて書け．また，M の最終状態の集合 F を書け．

4. 次の文脈自由文法 G_1, G_2 が与えられたとき，以下の問いに答えよ．

$G_1 = (N_1, \Sigma, P_1, S_1) = (\{S_1\}, \{a, b\}, \{S_1 \to aS_1,\ S_1 \to b\}, S_1)$,

$G_2 = (N_2, \Sigma, P_2, S_2) = (\{S_2, A, B\}, \{a, b\}, \{S_2 \to aA,\ A \to aAB,\ A \to b,\ B \to b\}, S_2)$.

ここで，N_1, N_2 は非終端記号の集合，Σ は終端記号の集合，P_1, P_2 は生成規則の集合，S_1, S_2 は開始記号である．

(1) G_1 が生成する言語 $L(G_1)$ を書け．また，G_2 が生成する言語 $L(G_2)$ を書け．ただし，これらの言語は，例えば $\{a^i b^j \mid i \geq 0,\ j \geq 0\}$ のような形式で表記すること．

(2) Σ 上の言語 L_3 が $L(G_1)$ と $L(G_2)$ との連接 (すなわち，$L_3 = L(G_1) \cdot L(G_2)$) であるとき，次の終端記号列のうち，$L_3$ に属するものをすべて書け．
aab, bab, $aabb$, $abab$, $aabab$, $ababb$, $baabb$, $aaabbb$, $abaabb$

(3) L_3 を生成する文脈自由文法を $G_3 = (N_1 \cup N_2 \cup \{S_3\},\ \Sigma,\ P_3,\ S_3)$ とし，$P_3 = P_1 \cup P_2 \cup X$ とする．X がただ 1 つの生成規則からなる集合であるとき，その生成規則を書け．

問 3: 言語：Language, 奇数：Odd number, 3 の倍数：Multiple of 3, 記号列：String, 受理：Accept, 状態数：Number of states, 決定性有限オートマトン：Deterministic finite automaton, 状態遷移関数：State transition function, 状態遷移図：State transition diagram, 初期状態：Initial state, 最終状態：Final state

問 4: 文脈自由文法：Context-free grammar, 非終端記号：Nonterminal symbol, 終端記号：Terminal symbol, 生成規則：Production, 開始記号：Start symbol, 生成：Generate, 連接：Concatenation, 終端記号列：Terminal string