

機械知能システム学専攻 必須問題（数学） 解答例

必須問題では、基礎的な知識や理解を問う問題を出題しました。解答については、その一例を以下に示しますが、これと同等な他の表現もありえます。

数学基礎

[問1]

- (1) 変数変換として、 $x = r\cos\theta$  および  $y = r\sin\theta$  を考える。定義より、 $D_R: r \leq \sqrt{R}, 0 \leq \theta \leq 2\pi$  である。ヤコビ行列の行列式は

$$J = \det \begin{bmatrix} \frac{dx}{dr} & \frac{dx}{d\theta} \\ \frac{dy}{dr} & \frac{dy}{d\theta} \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{bmatrix} = r$$

である。よって

$$\iint_{D_R} e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{R}} e^{-r^2} r dr d\theta = \int_0^{2\pi} \left( -\frac{1}{2} e^{-R} + \frac{1}{2} \right) d\theta = \pi(1 - e^{-R})$$

- (2) 以降では、問題の微分方程式を★と呼ぶ。はじめに★の特殊解を求める。解の候補として、 $y = ae^{-2x}$  を考える。これを★に代入すると

$$(4a - 4a + 5a)e^{-2x} = 5e^{-2x}$$

を得る。これを解いて、 $a = 1$ を得る。よって、 $y = e^{-2x}$ は★の特殊解である。

つぎに、★の右辺を零とした場合の微分方程式の一般解を求める。特性方程式

$$\lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0$$

の解は $\lambda = \frac{-2 \pm \sqrt{4-20}}{2} = -1 \pm 2i$  である。ここで、 $i$ は虚数単位である。

したがって一般解は、 $c_1, c_2$  を任意の実数として

$$e^{-x}(c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x)$$

と書ける。以上より、★の一般解は

$$e^{-x}(c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x) + e^{-2x}$$

である。

- (3) 以降では、問(2)の解を☆と呼ぶ。☆より、 $y(0) = c_1 + 1$  なので、 $c_1 = -1$  である。

つぎに、☆を $x$ で微分すると

$$\frac{dy}{dx} = -e^{-x}(-\cos 2x + c_2 \sin 2x) + e^{-x}(2 \sin 2x + 2c_2 \cos 2x) - 2e^{-2x}$$

となる。これに $x = 0$ を代入すると

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=0} = 2c_2 - 1$$

なので、 $c_2 = 1$  である。よって

$$y(1) = e^{-1}(-\cos 2 + \sin 2) + e^{-2}$$

である。（ $-\cos 2 + \sin 2 = \sqrt{2} \sin(2 - \pi/4)$ なので、 $y(1) = \sqrt{2}e^{-1} \sin(2 - \pi/4) + e^{-2}$ も可。）

[問2]

(1) 連立一次方程式

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 4 \\ x + 3y + 6z = 10 \\ x + 4y + 9z = c \end{cases}$$

の拡大係数行列は、基本変形によって、以下のように変形できる。

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 9 & c \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 2 & 6 & c-4 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & -8 \\ 0 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & c-16 \end{array} \right)$$

この方程式が解を持つとき、 $c - 16 = 0$  なので、 $c = 16$  となる。

$z = k$  と置いて、一般解は以下のように求められる。

$$x = 3k - 8, \quad y = -3k + 6, \quad z = k \quad (k \text{ は任意の実数})$$

(2)  $T = A - \lambda E$  と置くと、

$$|T| = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 & -2 \\ 2 & -\lambda & -4 \\ -1 & 1 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)(2-\lambda)^2 \quad \text{なので、} \lambda = 2, 3$$

固有値に対応する固有ベクトルを求める。

(i)  $\lambda = 2$  のとき、

$$T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & -2 & -4 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ より、} \quad T \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 - \alpha_2 - 2\alpha_3 \\ 2(\alpha_1 - \alpha_2 - 2\alpha_3) \\ -(\alpha_1 - \alpha_2 - 2\alpha_3) \end{pmatrix}$$

$\alpha_2 = k_1, \alpha_3 = k_2$  と置いて

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = k_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(ii)  $\lambda = 3$  のとき、

$$T = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 2 & -3 & -4 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ より、} \quad T \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\beta_2 - 2\beta_3 \\ 2\beta_1 - 3\beta_2 - 4\beta_3 \\ -\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 \end{pmatrix}$$

$$\beta_3 = k_3 \quad \text{と置いて、} \quad \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix} = k_3 \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

線型独立な3個の解ベクトルが求められたので、行列  $A$  は対角化可能である。

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ とすれば、} A \text{ は} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \text{ に対角化できる。}$$

(3)  $R$  は直線  $L$  上にあるので、媒介変数  $k$  を用いて、 $R = P + ke$  と書ける。

また、 $QR$  は直線  $L$  に垂直なので、 $(R - Q) \cdot e = 0$  が成り立つ。

$R$  の式を代入して  $k = (Q - P) \cdot e$

よって、答えは、 $R = P + \{(Q - P) \cdot e\} e$

機械知能システム学専攻 必須問題（物理学） 解答例

必須問題では、基礎的な知識や理解を問う問題を出題しました。解答については、その一例を以下に示しますが、これと同等な他の表現もありえます。

物理学基礎

[問1]

(1) 並進運動エネルギーは、 $\frac{1}{2}Mv_s^2$ .

回転運動エネルギーは、 $\frac{1}{2}I\omega_s^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}Mr^2 \cdot \left(\frac{v_s}{r}\right)^2 = \frac{1}{4}Mv_s^2$ .

(2) 初期位置における位置エネルギーは、 $MgL \sin \theta$ . 従って、力学的エネルギー保存則より

$$\frac{1}{2}Mv_s^2 + \frac{1}{4}Mv_s^2 = MgL \sin \theta$$

$$v_s^2 = \frac{4}{3}gL \sin \theta$$

$$v_s = \sqrt{\frac{4}{3}gL \sin \theta}.$$

(3) 並進運動方程式： $M\dot{v} = Mg \sin \theta - f$

回転運動方程式： $I\dot{\omega} = rf$

(4)  $\dot{v} = r\dot{\omega}$ より、 $\frac{1}{2}Mr^2 \cdot \frac{\dot{v}}{r} = rf \rightarrow M\dot{v} = 2f$ . 並進運動方程式に代入して、

$$f = \frac{1}{3}Mg \sin \theta.$$

(5) 距離 $L$ だけ進むのにかかる時間は初速度0なので、 $L = \frac{1}{2}\dot{v}t^2$ から、 $t = \sqrt{\frac{2L}{\dot{v}}}$ .

従って、 $\frac{t_{\text{slip}}}{t} = \sqrt{\frac{\dot{v}}{\dot{v}_{\text{slip}}}}$ .

(4)より、 $\dot{v} = \frac{2}{3}g \sin \theta$ , 摩擦がない場合は $f = 0$ なので、 $\dot{v}_{\text{slip}} = g \sin \theta$ .

以上より、 $\frac{t_{\text{slip}}}{t} = \sqrt{\frac{2}{3}}$ .

(6) (3)および $\dot{v} = r\dot{\omega}$ より、一般的な並進加速度は、 $M\dot{v} = Mg \sin \theta - I \frac{\dot{v}}{r^2}$

$$\left(M + \frac{I}{r^2}\right)\dot{v} = Mg \sin \theta$$

$$\dot{v} = \frac{Mg \sin \theta}{\left(\frac{I}{r^2} + M\right)}.$$

従って、円柱の加速度は $\frac{2}{3}g \sin \theta$ , 球の加速度は $\frac{5}{7}g \sin \theta$ , 薄い円筒の加速度は $\frac{1}{2}g \sin \theta$ . 加速度の大きさより、距離 $L$ だけ進むのにかかる時間は球、円柱、薄い円筒の順に短い.

[問2]

(1) 36000 C

(2)

(ア) 基準電位を  $C$  (V) とした場合,

$$V(r_0) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r_0} + C$$

無限遠を基準電位 0 V とした場合は

$$V(r_0) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r_0}$$

(イ) 無限遠を基準電位 0 V とした場合,

$$V(r_1) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a} + \frac{Q}{8\pi\epsilon_1 a^3} (a^2 - r_1^2)$$

基準電位の設定条件に依存して解が異なる.

(3)

$$H = \frac{2\sqrt{2}}{\pi L} I$$

機械知能システム学専攻 選択問題 解答例

選択問題では、専門的な知識や理解を問う問題を出題しました。解答については、その一例を以下に示しますが、これと同等な他の表現もありえます。

1 材料力学

問1

(1)  $\varepsilon_1 = \alpha T$

(2)  $\delta_A = \alpha T \ell$

(3)  $\sigma_2 = \sigma_3 = -\frac{3}{4} E \alpha T$

(4)  $\varepsilon_2 = \frac{1}{4} \alpha T, \varepsilon_3 = -\frac{1}{4} \alpha T$

(5)  $\delta_B = \frac{1}{4} \alpha T \ell$

問2

(1)  $F = -P_A, M = M_A - P_A x$

(2)  $\theta = -\frac{1}{2EI} [2M_A(x - \ell) - P_A(x^2 - \ell^2)], y = -\frac{1}{6EI} [3M_A(x^2 - 2\ell x + \ell^2) - P_A(x^3 - 3\ell^2 x + 2\ell^3)]$

(3)  $P_A = \frac{3M_A}{2\ell}$

2 機械力学

[問 1]

$$(1) 2ml^2\ddot{\theta} + (mgl + 2ka^2)\theta = 0$$

$$(2) \omega_n = \frac{1}{l} \sqrt{\frac{mgl + 2ka^2}{2m}}$$

$$(3) k_B = 4k$$

$$(4) 10ml^2\ddot{\theta} + 2cb^2\dot{\theta} + 5(mgl + 2ka^2)\theta = 0$$

$$(5) b < \sqrt[4]{\frac{50ml^2(mgl + 2ka^2)}{c^2}}, \quad \xi = \frac{cb^2}{5l\sqrt{2m(mgl + 2ka^2)}}$$

[問 2]

$$(1) \text{箱} \quad m\ddot{x}_1 + 4kx_1 - 2kx_2 = kA \sin \omega t$$

$$\text{質点} \quad m\ddot{x}_2 - 2kx_1 + 2kx_2 = 0$$

$$(2) \omega_1 = \sqrt{\frac{(3-\sqrt{5})k}{m}}, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{(3+\sqrt{5})k}{m}}$$

$$\lambda_1 = \frac{\sqrt{5}+1}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

$$(3) A_1 = \frac{k(2k - m\omega^2)A}{m^2\omega^4 - 6km\omega^2 + 4k^2}, \quad A_2 = \frac{2k^2A}{m^2\omega^4 - 6km\omega^2 + 4k^2}$$

### 3 熱力学

#### 【問1】

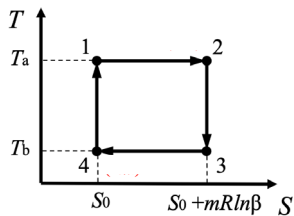
- (1) 気体定数  $R$  は  $\frac{\Delta Q}{m\Delta T}$  であり、定圧比熱  $c_p$  は  $\frac{\Delta Q}{m\Delta T} + c_v$  であり、比熱比  $\gamma$  は  $\frac{\Delta Q}{mc_v\Delta T} + 1$  である。
- (2) 気体に加得られる熱は  $\Delta Q + mc_v\Delta T$  であり、気体がなす仕事は  $\Delta Q$  であり、気体内部エネルギーの変化は  $mc_v\Delta T$  である。
- (3) 気体に加得られる熱は  $mc_v\Delta T$  であり、気体がなす仕事は  $0$  であり、気体内部エネルギーの変化は  $mc_v\Delta T$  である。

#### 【問2】

蒸気タービンが発生している動力は 4600 kW である。

#### 【問3】

- (1) 高温熱源から加熱された熱量は  $mRT_a \ln\beta$  であり、エントロピーの変化  $mR \ln\beta$  である。
- (2) 低温熱源に放熱した熱量は  $mRT_b \ln\beta$  であり、エントロピーの変化は  $-mR \ln\beta$  である。
- (3) エントロピーの変化は  $0$  であり、可逆サイクルである。
- (4) このカルノーサイクルの熱効率は  $1 - \frac{T_b}{T_a}$  である。
- (5)



- (6) 状態 1 において、体積は  $\frac{mRT_a}{p_0}$  であり、圧力は  $p_0$  である。  
状態 2 において、体積は  $\frac{\beta mRT_a}{p_0}$  であり、圧力は  $\frac{p_0}{\beta}$  である。  
状態 3 において、体積は  $\frac{\beta mRT_a}{p_0} \left(\frac{T_a}{T_b}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}$  であり、圧力は  $\frac{p_0}{\beta} \left(\frac{T_b}{T_a}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$  である。  
状態 4 において、体積は  $\frac{mRT_a}{p_0} \left(\frac{T_a}{T_b}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}$  であり、圧力は  $p_0 \left(\frac{T_b}{T_a}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$  である。

#### 4 流体力学

問1. 式(1)～(3)を式(4)～(6)にそれぞれ代入・整理すると、等式(4)～(6)のそれぞれにおいて左辺=右辺であることが示される。

問2.

A.  $u = \sqrt{2gh}$

B.  $\gamma$  を正定数とすると、 $r = \gamma\sqrt{h}$  より  $\frac{dh}{dt} = -\frac{a\sqrt{2g}}{\pi\gamma^2}$  の右辺が定数となることより示される。

5 制御工学

問 1

(1)

$$X(s) = \frac{1}{2}mg \frac{1}{s(ms^2 + k)} + \frac{1}{ms^2 + k}$$

(2)

$$x(t) = \frac{g}{2\omega^2}(1 - \cos \omega t) + \frac{\omega}{k} \sin \omega t$$

または

$$x(t) = \frac{g}{2\omega^2}(1 - \cos \omega t) + \frac{1}{m\omega} \sin \omega t$$

問 2

(1)

$$\frac{X(s)}{R(s)} = \frac{k_p mg}{ms^2 + k_p mg + k}$$

(2)

伝達関数の極、 $ms^2 + k_p mg + k = 0$ より、

$$s = \pm \sqrt{\frac{k_p mg + k}{m}} i$$

となり、極は虚軸上に現れる。すなわち、持続振動となるので、 $r(t)$ には収束しない。

(3)

$$\frac{k}{k_p mg + k} \bar{r}$$

(4)

(解答例) 制御入力に積分制御の項を用いる。

問3

(1)

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ g \end{bmatrix}, \quad C = [1 \quad 0]$$

(2)

$$\lambda^2 + gk_2\lambda + \frac{k}{m} + gk_1 = 0$$

(3)

$$k_1 = \frac{13 - k/m}{g}$$

$$k_2 = 4/g$$

6 電気回路学

(1)

$$\dot{Z} = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$$

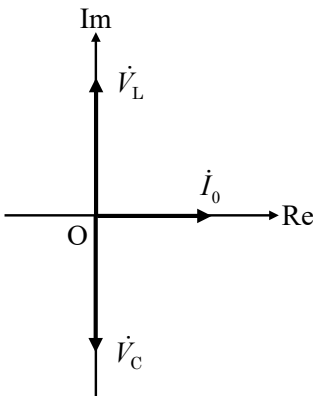
$$|\dot{Z}| = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$$

$$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}\right)$$

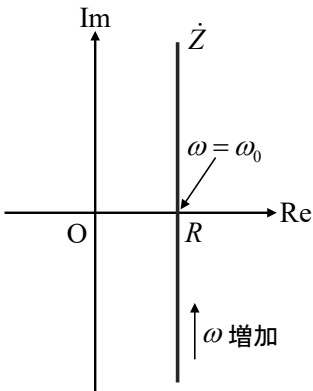
(2)

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$$

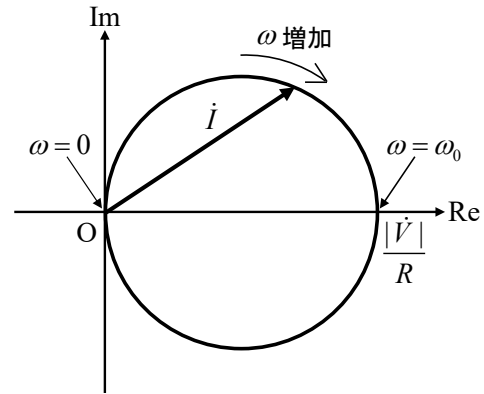
$$\dot{Z} = R$$



(3)



(4)



(5)

$$\begin{cases} \omega_1 = \frac{\sqrt{R^2 C^2 + 4LC}}{2LC} - \frac{R}{2L} \\ \omega_2 = \frac{\sqrt{R^2 C^2 + 4LC}}{2LC} + \frac{R}{2L} \end{cases}$$

(6)

$$Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$$

(7)

$$\dot{Z}_L = \dot{Z}^* \quad (*\text{は複素共役を示す})$$

$$\text{または } R_L = R \text{ かつ } X_L = -\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$$

$$P_{\max} = \frac{|\dot{V}|^2}{4R}$$

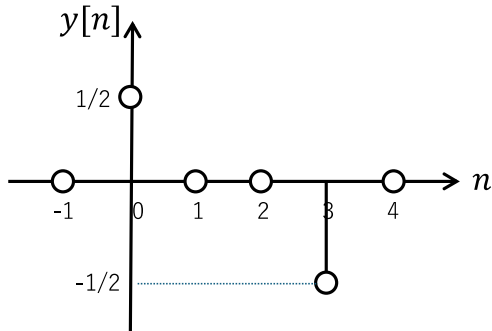
7 デジタル信号処理

問 1

(1)  $\frac{1}{2}(1 - z^{-1})$

(2)  $1 + z^{-1} + z^{-2}$

(3)



(4)  $A(\omega) = \sqrt{\frac{1}{2}(1 - \cos \omega)}$  ,  $\theta(\omega) = \frac{\pi}{2} - \frac{\omega}{2}$

問 2

(1) 入力  $x_1[n], x_2[n]$  に対応する出力を  $y_1[n], y_2[n]$  とすると,  $x[n] = ax_1[n] + bx_2[n]$  を入力した場合の出力は

$$\sum_{i=n-m}^{n+m} \{ax_1[i] + bx_2[i]\} = a \sum_{i=n-m}^{n+m} x_1[i] + b \sum_{i=n-m}^{n+m} x_2[i] = ay_1[n] + by_2[n]$$

となり, 線形である. また,  $x'[n] = x[n - N]$  に対する出力は

$$\sum_{i=n-m}^{n+m} x'[i] = \sum_{i=(n-N)-m}^{(n-N)+m} x[i] = y[n - N]$$

であり, 時不変である. したがって, 線形時不変システムである.

(2)  $h[n] = \begin{cases} 1 & -m \leq n \leq m \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$

(3)

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]| = 2m + 1 < \infty$$

となり, BIBO 安定である.

(4)  $\begin{cases} 0 & (n < -m) \\ n + m + 1 & (-m \leq n \leq m) \\ 2m + 1 & (n > m) \end{cases}$

8 応用数学

問 1

(1)  $u_r = \frac{1}{r}v_\theta = 2r \cos 2\theta$ ,  $v_r = -\frac{1}{r}u_\theta = 2r \sin 2\theta$  より任意の点  $z$  において極形式のコーシー・リーマン方程式が成り立つので  $w$  は任意の点  $z$  において正則である.  $w$  の導関数は  $2z$ .

(2)  $-3$

問 2

(1)  $4\pi i$

(2)  $\frac{\pi(2n)!}{2^{2n-1}(n!)^2}$